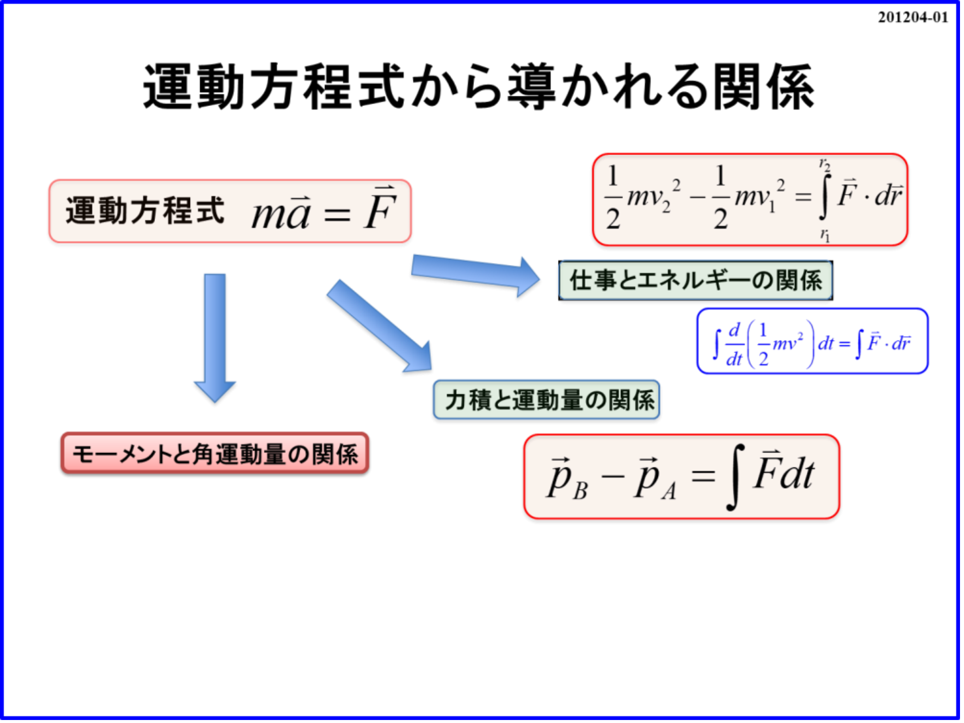
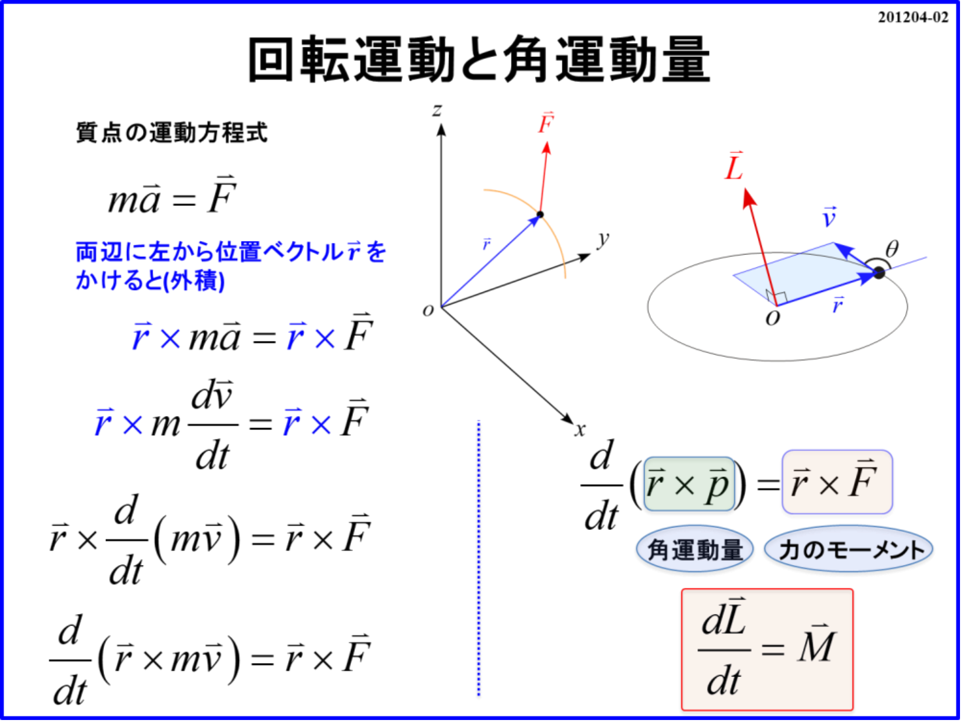


前回に続き「運動方程式から導かれる関係」を扱っていきます。

今回は3つ目の関係式である「モーメントと角運動量の関係」を解説していきます。
ここでは外積を用いるので、初回授業のベクトルの部分を復習した後で進めると良いでしょう。



3次元空間での一般的なモデルを考えてみましょう。

運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

の両辺に左側から位置ベクトル$\vec{r}$の外積を取ると

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

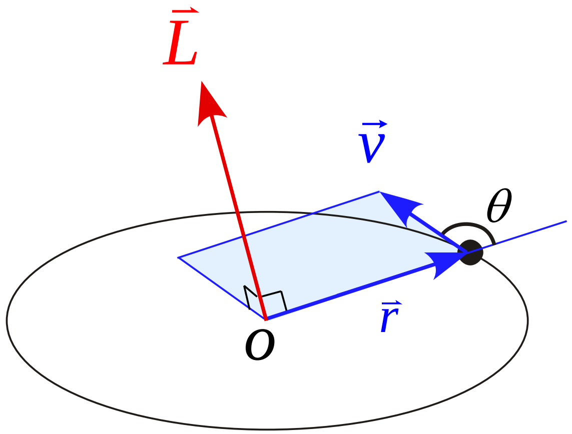
となります。

加速度の定義 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ より

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$



と変形します。

$\frac{d}{dt}$(　　)の部分「$\vec{r} \times m\vec{v}$」は「角運動量 $\vec{L}$」と呼びます。

又、右辺の「$\vec{r} \times \vec{F}$」を「力のモーメント $\vec{M}$」と呼びます。

運動量 $\vec{p}$ は $\vec{p} = m\vec{v}$ であるので

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

と表され、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

を「回転の運動方程式」と呼びます。

201204-03

回転運動と角運動量

途中の式変形について（何故、$\vec{r}$ が微分の中に入るのか？）

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\,//\,m\vec{v}$ より

$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\vec{0}$

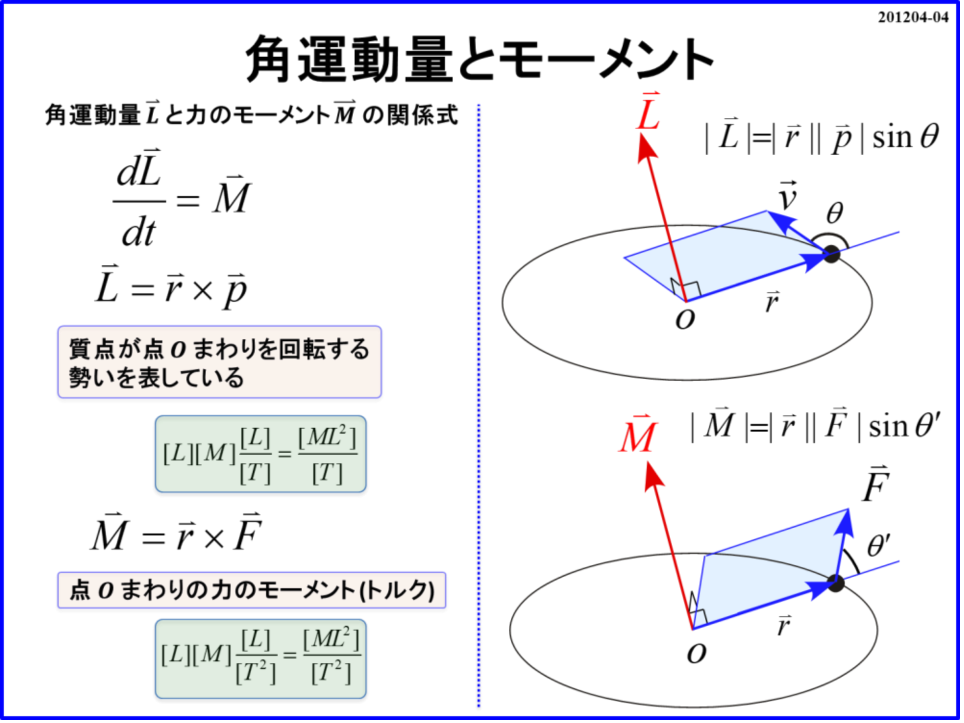
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

さて、前の式変形において「$\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$」を「$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})$」と変形しましたが、
この式変形が本当に正しいのか確認しておきましょう。
変形後の「$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})$」を計算して元の形の戻ればOKとなります。

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)=\underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{\text{自分自身の外積は }0}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

となります。



「**角運動量$\vec{L}$**」は「**質点が点Oまわりを回転する勢い**」を表す量になります。
角運動量$\vec{L}$は**ベクトル量**で$\vec{r}$と$\vec{v}$に垂直なベクトルとなります。
その次元は

(m の次元)

$$[L][M]\left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{ML^2}{T}\right]$$ となります。

($\vec{r}$ の次元)

($\vec{v}$ の次元)

「力のモーメント $\vec{M}$ 」は「点Oまわりを回転させようとする働き(回転能率)」を表す量になります。力のモーメントは「トルク」と呼ぶこともあります。
力のモーメント $\vec{M}$ はベクトル量で $\vec{r}$ と $\vec{F}$ に垂直なベクトルとなります。
その次元は

$$\underbrace{[L]}_{(\vec{r}\text{ の次元})}\underbrace{\left[\frac{ML}{T^2}\right]}_{(\vec{F}\text{ の次元})}=\left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$$

となります。

ここでの注意点は角運動量の次元と力のモーメントの次元は異なることです。
「角運動量 $\vec{L}$ を t で微分した量」が力のモーメントになるので $\frac{1}{[\mathrm{T}]}$ の分だけ違いがでます。

角運動量保存則

角運動量 $\vec{L}$ と力のモーメント $\vec{M}$ の関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

ある質点の点 O まわりの
角運動量 $\vec{L}$ の変化は
この質点に働く点 O まわりの
力のモーメント $\vec{M}$ に等しい

もし、モーメント $\vec{M} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

外力によるモーメントの総和 $\vec{M}$ が
$\vec{0}$ のときは、内力が働いていたとしても、
系の角運動量 $\vec{L}$ は変化しない

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

回転の運動方程式において、力のモーメント $\overrightarrow{M} = 0$ であれば

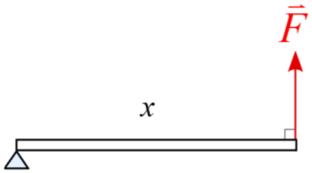
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、「角運動量 $\vec{L}$ 」は時間的に変化せず、保存しているといえます。
これを「角運動量保存則」と言います。
力のモーメントは $\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ であるから、「$\vec{r} = \vec{0}$ or $\vec{F} = \vec{0}$」は当然「$\overrightarrow{M} = \vec{0}$」になるが、
外積の性質より $\vec{r}$ と $\vec{F}$ のなす角 θ が「 0 or π 」の場合も「 $\overrightarrow{M} = \vec{0}$ 」となることに注意したい。

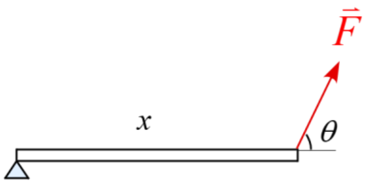
力のモーメント～例題

以下の図の力のモーメント$\vec{M}$及びその大きさ$|\vec{M}|$を計算せよ。
但し、棒の質量は無視できるとする。

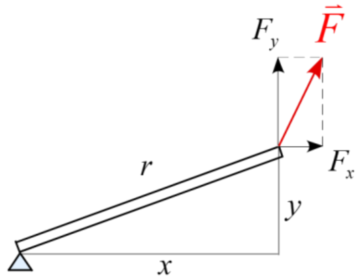
1.



2.



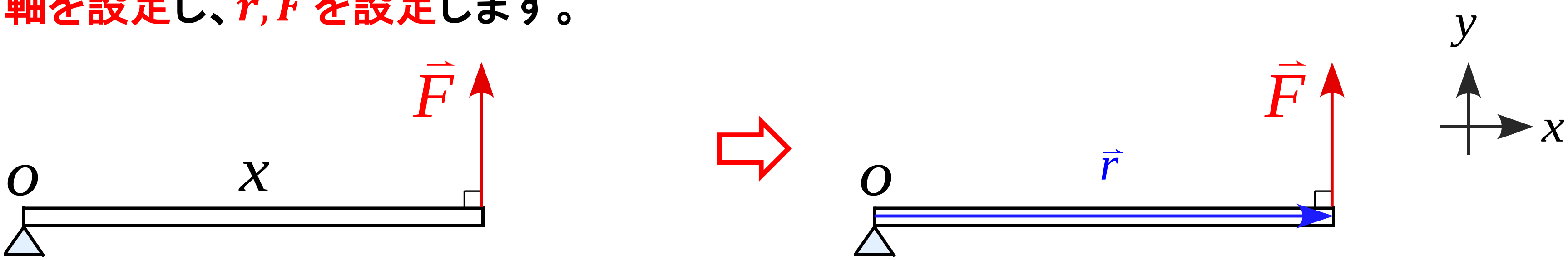
3.



それでは、力のモーメント$\vec{M}$を求める練習をしてみましょう。

力のモーメントは$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$なので$\vec{r}, \vec{F}$の設定が重要になります。

1. **軸を設定し、$\vec{r}, \vec{F}$ を設定します。**



従って、ここで用いる $\vec{r}, \vec{F}$ は

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります。
よって

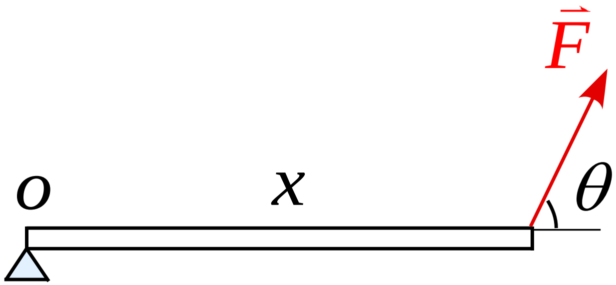
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot F \\ 0 \cdot 0 - x \cdot 0 \\ x \cdot F - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF \end{pmatrix}$$

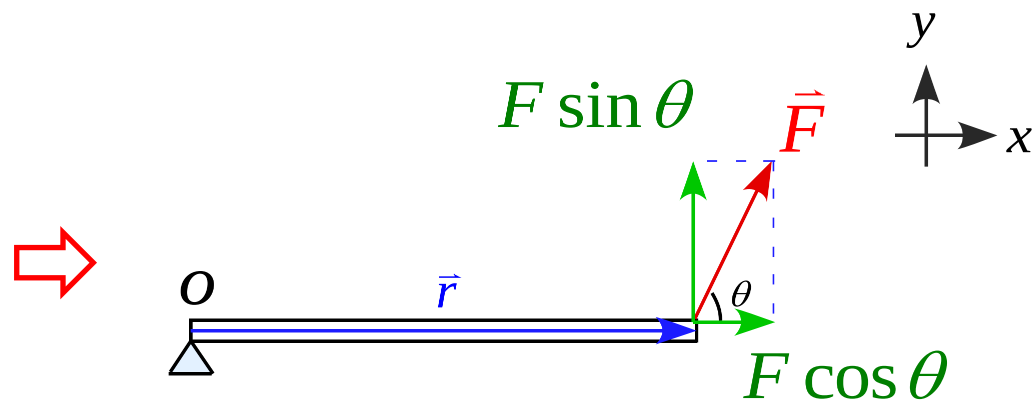
$$M = \left| \vec{M} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (xF)^2} = xF$$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}}$$

となります。

2. 軸を設定し、$\vec{r}, \vec{F}$ を設定します。





従って、ここで用いる $\vec{r}, \vec{F}$ は

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります。

よって

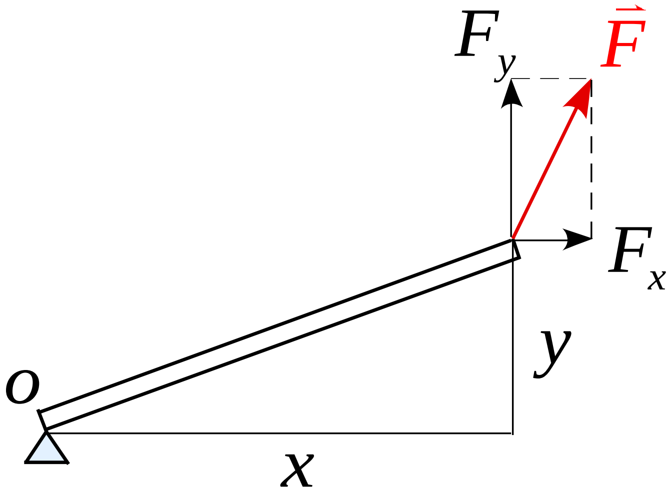
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 0\cdot F\sin\theta \\ 0\cdot F\cos\theta - x\cdot 0 \\ x\cdot F\sin\theta - 0\cdot F\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF\sin\theta \end{pmatrix}$$

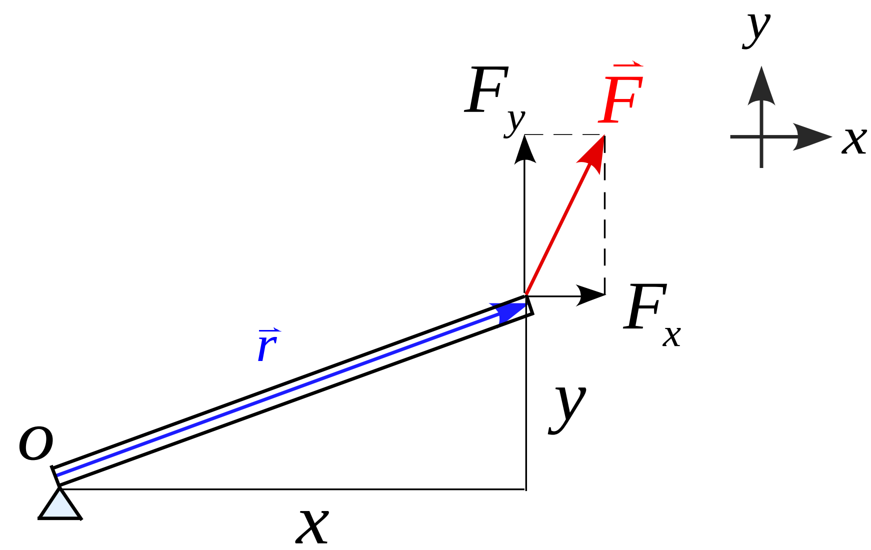
$$M = \left|\vec{M}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (xF\sin\theta)^2} = xF\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}}$$

となります。

3. 軸を設定し、$\vec{r},\vec{F}$ を設定します。





従って、ここで用いる $\vec{r},\vec{F}$ は

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{F}=\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_yB_z-A_zB_y\\A_zB_x-A_xB_z\\A_xB_y-A_yB_x\end{pmatrix}$$

となります。

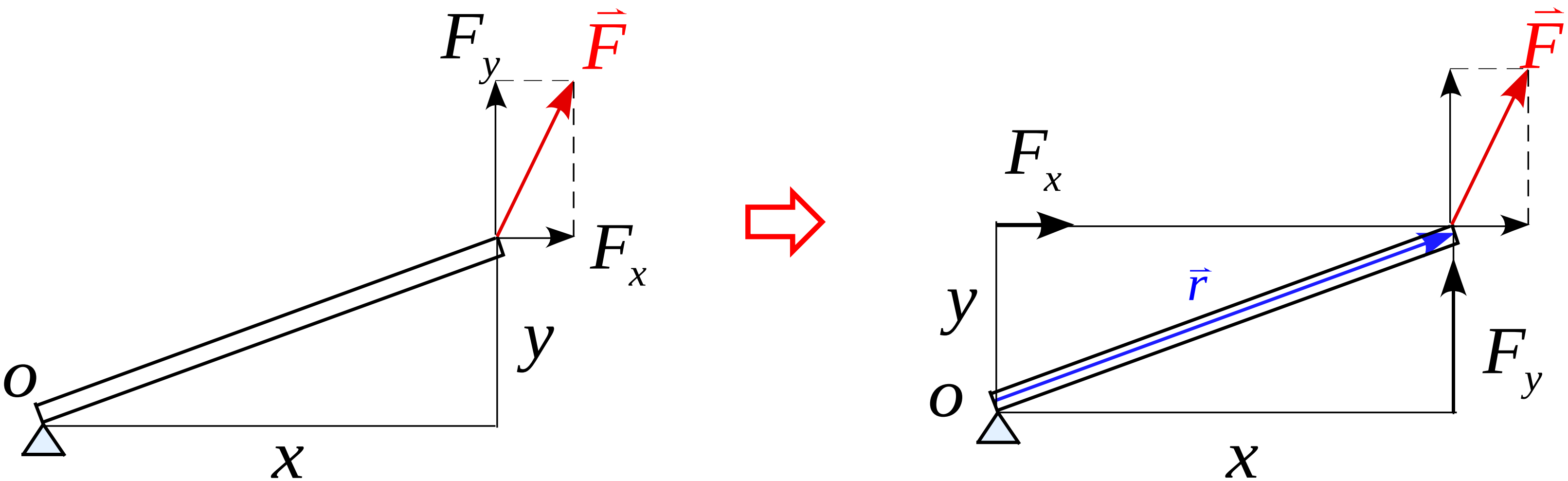
よって

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\cdot 0-0\cdot F_y\\0\cdot F_x-x\cdot 0\\x\cdot F_y-y\cdot F_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\xF_y-yF_x\end{pmatrix}$$

$$M = \left|\vec{M}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(xF_y - yF_x\right)^2} = xF_y - yF_x$$

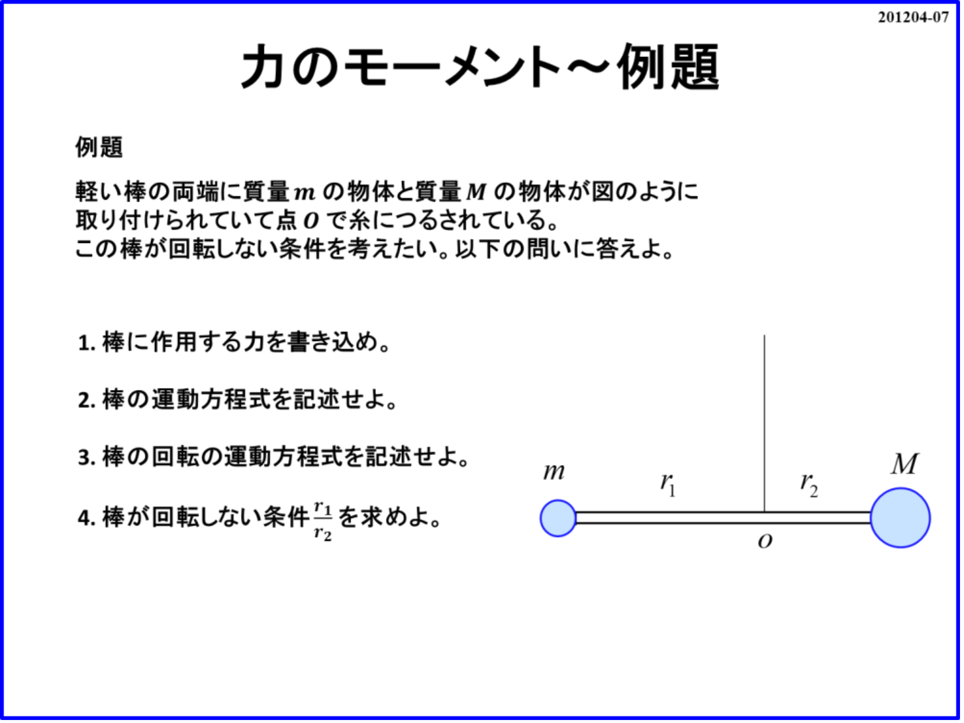
となります。

この式を別の見方をすると



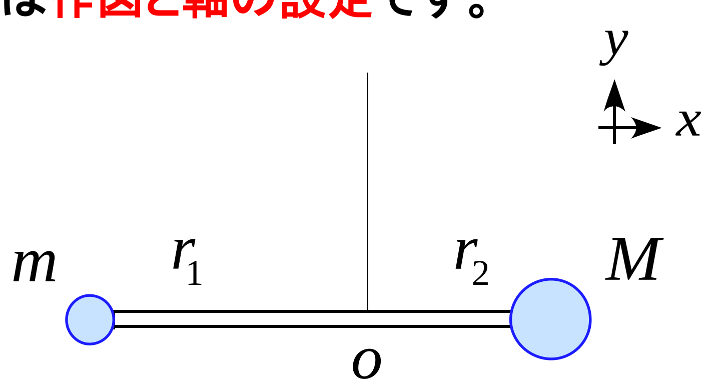
ここで、x 成分と y 成分に分けて考えると「 xF_y 」は反時計まわりの力のモーメントを表し、「 yF_x 」は時計まわりの力のモーメントを表していることがわかります。

注) 一般的に反時計回りを回転方向の正と考えます。

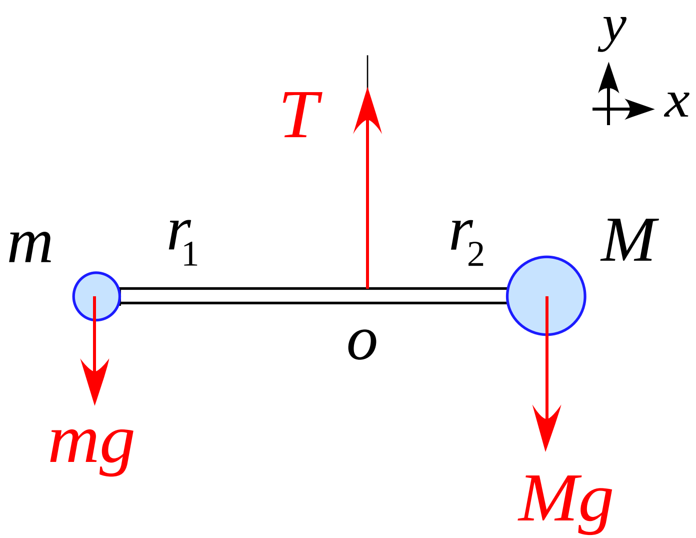


力のモーメントの例題になります。
回転の運動方程式をから棒が回転しない条件を導きます。

まずは**作図と軸の設定**です。



続いて、作用する力を書き込みます。



棒に作用する力は左右の重り「重力 mg 」「重力 Mg 」と「糸の張力 T 」になります。

従って運動方程式は

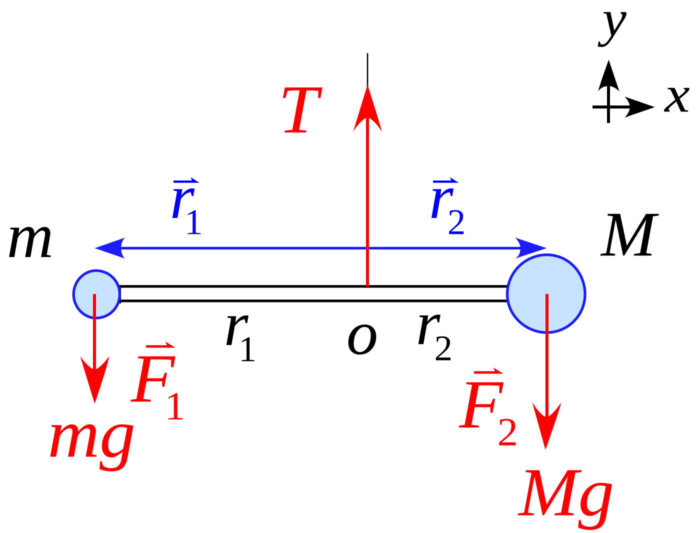
$$\left(m+M\right)a_y = T - mg - Mg$$

となり、$a_y = 0$ (動かない) より

$$0 = T - mg - Mg$$

となります。

ここで $\vec{r}, \vec{F}$ を設定します。



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって力のモーメント $\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}$ は

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-mg) \\ 0 \cdot 0 - (-r_1) \cdot 0 \\ -r_1 \cdot (-mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-Mg) \\ 0 \cdot 0 - r_2 \cdot 0 \\ r_2 \cdot (-Mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_2 Mg \end{pmatrix}$$

となります。

従って、回転の運動方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_2 Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 mg - r_2 Mg \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dL_x}{dt} \\ \frac{dL_y}{dt} \\ \frac{dL_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 mg - r_2 Mg \end{pmatrix}$$

と表されます。

従って**棒が回転しない条件は $\frac{dL_z}{dt} = 0$** であれば良いので

$$\frac{dL_z}{dt} = r_1 mg - r_2 Mg = 0$$

$$r_1 mg = r_2 Mg$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M}{m}$$

となります。

力のモーメント～例題

例題

図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点が取り付けられ、糸でつるされている。
この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

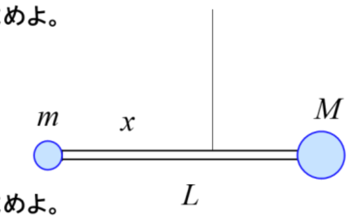
　(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

　(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

2. 棒の質量が m の場合

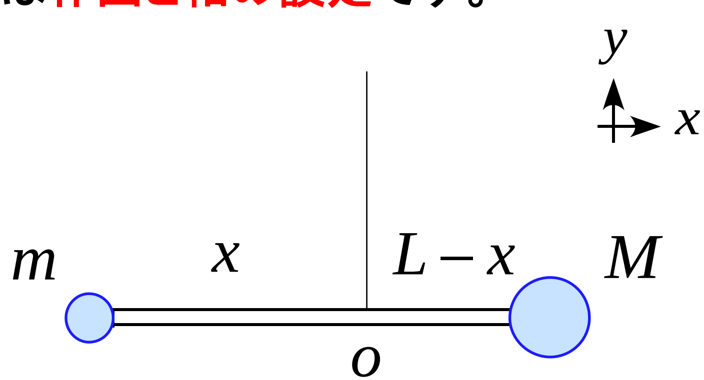
　(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

　(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

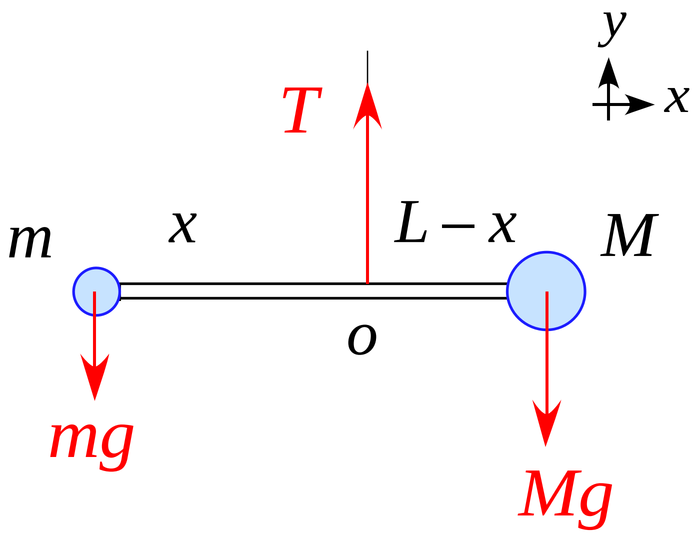


力のモーメントの例題になります。
回転の運動方程式をから棒が回転しない条件を導きます。
棒の重さを無視できる場合と無視できない場合の両方を検討します。

まずは**作図と軸の設定**です。

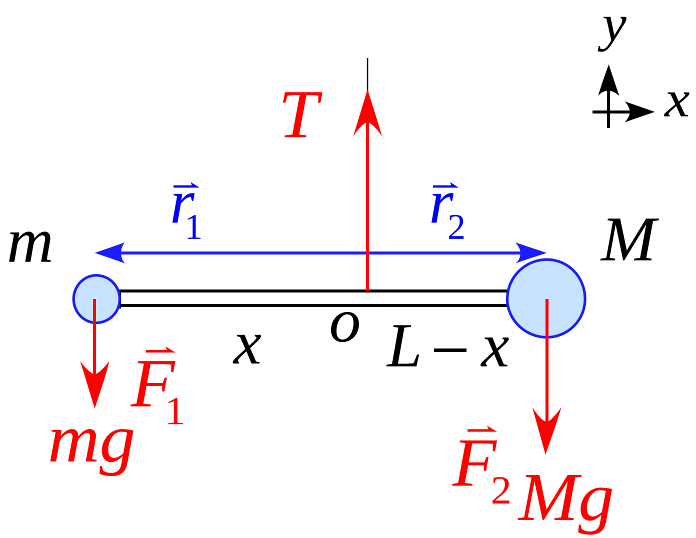


続いて、棒の質量が無視できる場合の作用する力を書き込みます。



棒に作用する力は左右の重り「重力 mg 」「重力 Mg 」と「糸の張力 T 」になります。

ここで $\vec{r},\vec{F}$ を設定します。



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって力のモーメント$\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}$ は

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-mg) \\ 0 \cdot 0 - (-x) \cdot 0 \\ -x \cdot (-mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} L - x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (L - x) \\ 0 \cdot 0 - (L - x) \cdot 0 \\ (L - x) \cdot (-Mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L - x) Mg \end{pmatrix}$$

となります。

従って、回転の運動方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L - x) Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L - x) Mg \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{dL_x}{dt}\\ \dfrac{dL_y}{dt}\\ \dfrac{dL_z}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ xmg-(L-x)Mg\end{pmatrix}$$

と表されます。

従って棒が回転しない条件は $\frac{dL_z}{dt}=0$ であれば良いので

$$\frac{dL_z}{dt}=xmg-(L-x)Mg=0$$

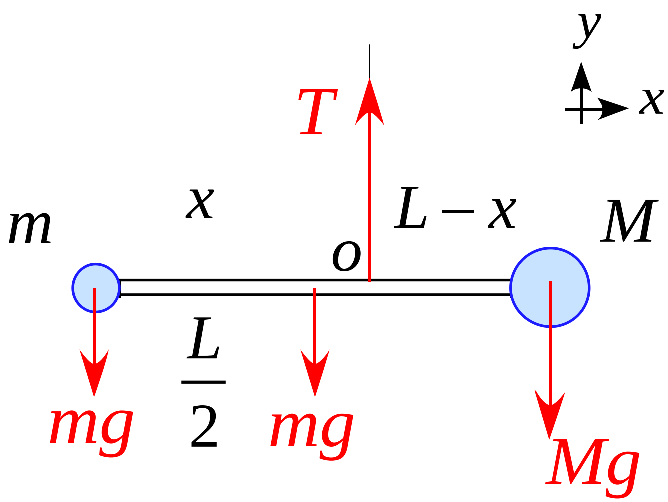
$$xmg-LMg+xMg=0$$

$$x(m+M)=LM$$

$$x=\frac{M}{m+M}L$$

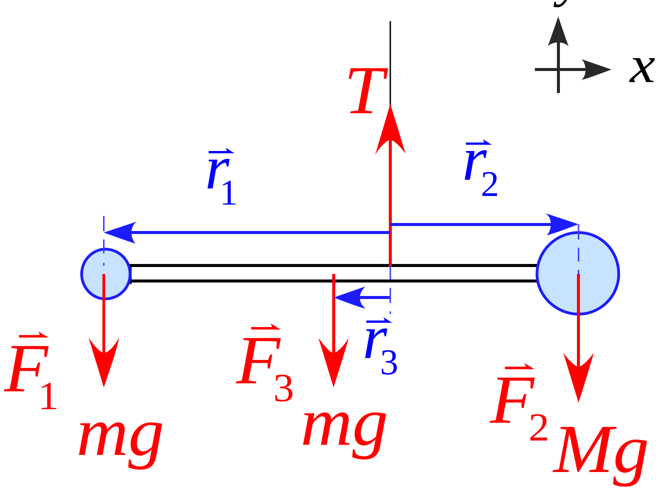
となります。

続いて、**棒の質量 m** の場合の**作用する力**を書き込みます。



棒に作用する力は左右の重り「**重力 mg**」「**重力 Mg**」と「**糸の張力 T**」、
さらに「**棒の質量による重力 mg**」になります。
棒の質量は「重心 $\frac{L}{2}$ の地点」に作用していると考えます。

ここで **$\vec{r}, \vec{F}$ を設定**します。



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -\left(x-\dfrac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって力のモーメント$\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{M_3}$は

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-mg) \\ 0 \cdot 0 - (-x) \cdot 0 \\ -x \cdot (-mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} L - x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (L - x) \\ 0 \cdot 0 - (L - x) \cdot 0 \\ (L - x) \cdot (-Mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L - x) Mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -\left(x - \dfrac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot \left(x - \dfrac{L}{2}\right) \\ 0 \cdot 0 - \left(x - \dfrac{L}{2}\right) \cdot 0 \\ -\left(x - \dfrac{L}{2}\right) \cdot (-mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x - \dfrac{L}{2}\right) mg \end{pmatrix}$$

となります。

従って、回転の運動方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L-x)Mg + \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dL_x}{dt} \\ \frac{dL_y}{dt} \\ \frac{dL_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L-x)Mg + \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}$$

と表されます。

従って棒が回転しない条件は $\frac{dL_z}{dt}=0$ であれば良いので

$$\frac{dL_z}{dt}=xmg-(L-x)Mg+\left(x-\frac{L}{2}\right)mg=0$$

$$xmg-LMg+xMg+xmg-\frac{L}{2}mg=0$$

$$(M+2m)x=\frac{L}{2}m+LM$$

$$x=\frac{m+2M}{2(M+2m)}L$$

となります。