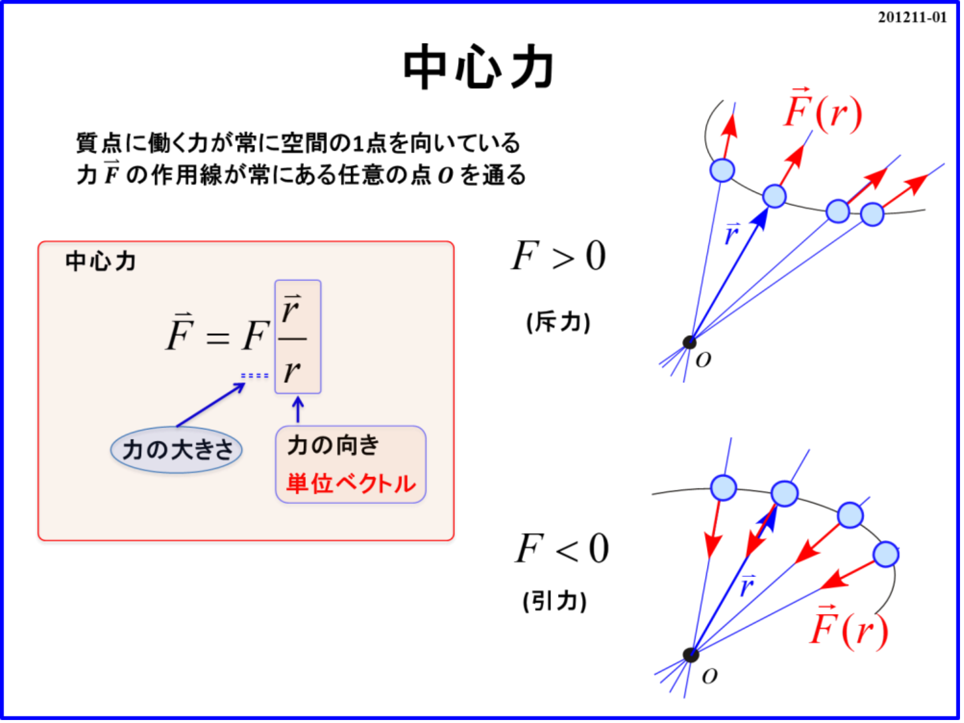
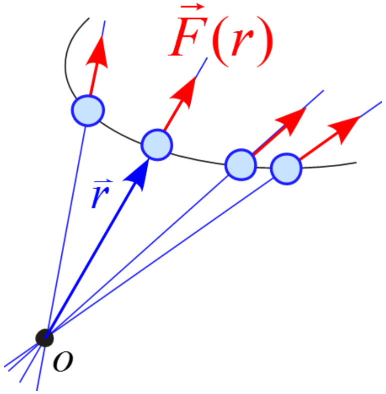
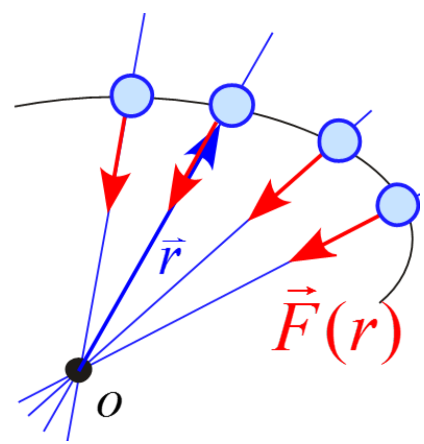


質点が力 $\vec{F}$ を受けて運動するとき、その力 $\vec{F}$ の作用線が常にある任意の点 o を通るなら
この力 $\vec{F}$ を「中心力」と呼びます。
言い換えると、「3次元極座標で表したとき、r 成分しか持たない力」となります。



質点とある点 o を結んだ
直線上に力 $\vec{F}$ がある



中心力 $\vec{F}$ を大きさと向きで表すと

$$\vec{F} = F \boxed{\frac{\vec{r}}{r}}$$

単位ベクトル

力の大きさ

となります。

$\dfrac{\vec{r}}{r}$ は単位ベクトルで、中心力 $\vec{F}$ の向きを表しています。

中心力〜角運動量保存

角運動量の変化を計算すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)$$

$$=m\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}+m\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$=m\vec{v}\times\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=0+\vec{r}\times\boxed{F\frac{\vec{r}}{r}}$$

中心力

$$=0$$

従って、中心力が働く運動では角運動量が保存する

この中心力 $\vec{F}$ における角運動量 $\vec{L}$ について考えてみましょう。

回転の運動方程式に着目すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$

の左辺の角運動量の時間変化を計算すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)$$

$$=\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$=\vec{0}+\vec{r}\times\vec{F}$$

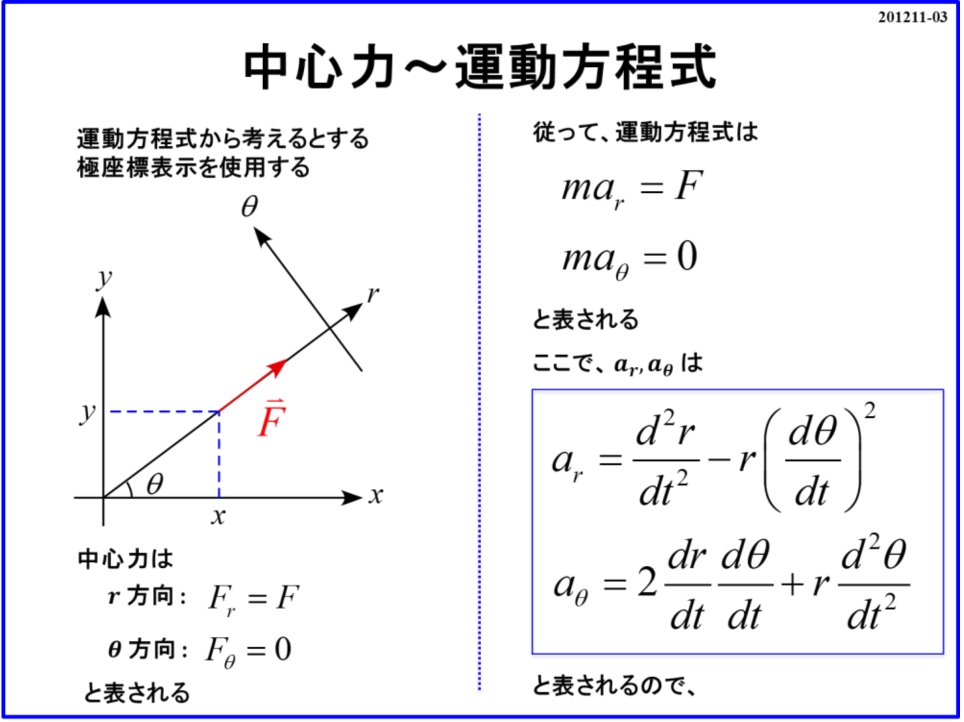
となります。ここで $\vec{F}$ が中心力であるとすると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times F\frac{\vec{r}}{r}=\vec{0}$$

となります。
従って、中心力による運動では角運動量が保存されることが解ります。
これは回転の運動方程式の右辺「力のモーメント $\vec{M}$ 」が

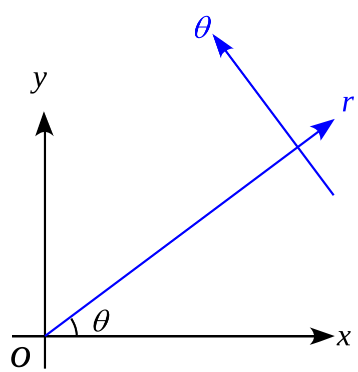
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times F\frac{\vec{r}}{r}=\vec{0}$$

と計算できることからも確認できます。



この中心力 $\vec{F}$ の運動方程式について検討してみましょう。

ここでは平面における極座標を用いて考えます。
平面の極座標は



2つの軸、r 方向と θ 方向で構成されています。一般的に r 方向は原点 o から外向きを正に設定し、θ 方向は「反時計回り」を正に設定します。

さて、話を戻すと、中心力 $\vec{F}$ は r 方向のみに力が作用している力なので、
r 方向、θ 方向の力をそれぞれ F_r, F_θ とすると

$$F_r = |\vec{F}| = F$$

$$F_\theta = 0$$

と表されます。
ここで、平面極座標の加速度 a_r, a_θ は一般的に

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表されます。
「何故、この様に表されるのか」については、レポート課題3をやるとわかります。
ここでは結果を利用することになります。
この加速度 a_r, a_θ は覚える必要は無いと思います。
この講義のテストを実施する場合は式を提示するので心配ないです。

中心力〜運動方程式

従って、運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F$$

動径方向の運動方程式

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

偏角(方位角)方向の運動方程式

と表される

従って、中心力 $\vec{F}$ における運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

と表されます。

r 方向は「動径方向」と呼び、θ 方向は「偏角方向 or 方位角方向」と呼びます。
この式は一般的な形なので、実際にモデルを扱う場合はこの式に条件を適用していく流れになります。

中心力～運動方程式

ここで、θ 方向の式が何を示しているか検討してみよう

変位は

$$x(t) = r\cos\theta$$

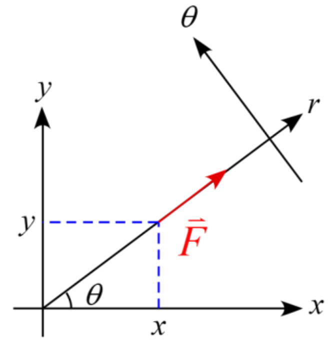
$$y(t) = r\sin\theta$$

である。
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

であるから

ここで θ 方向(偏角方向)の式

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

が何を示しているのか検討してみましょう。
ある時刻 t での位置ベクトル $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

と表されます。

よって、速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

と表されます。
v_x, v_y を計算すると

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{dt}(r\cos\theta) = \frac{dr}{dt}\cos\theta + r\frac{d}{dt}(\cos\theta) \\ &= \frac{dr}{dt}\cos\theta + r\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) \\ &= \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

となり、

$$v_y = \frac{d}{dt}\left(r\sin\theta\right) = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d}{dt}\left(\sin\theta\right)$$

$$= \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

となります。

「$\sin\theta$, $\cos\theta$」を微分したとき、θ は t の関数であるため「$\dfrac{d\theta}{dt}$」があることに注意が必要です。

ここで角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

であるから

中心力～運動方程式

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - x \cdot 0 \\ x \cdot p_y - y \cdot p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{L}| = L = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(xp_y - yp_x\right)^2} = xp_y - yp_x$$

と表される

成分の計算を行うと、

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$

となります。

よって、角運動量の大きさ $|\vec{L}|$ は

$$|\vec{L}| = L = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(xp_y - yp_x\right)}$$

$$= xp_y - yp_x$$

となります。

201211-07

中心力～運動方程式

従って、

$$
\begin{aligned}
L &= xp_y - yp_x \\
&= xmv_y - ymv_x \\
&= r\cos\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] - r\sin\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right] \\
&= rm\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - rm\frac{dr}{dt}\sin\theta\cos\theta + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt} \\
&= r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt} \\
&= r^2 m\frac{d\theta}{dt}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&= r^2 m\frac{d\theta}{dt}
\end{aligned}
$$

と表される

よって、これを極座標で表すには v_x, v_y に代入すればよいので

$$
\begin{aligned}
L &= xp_y - yp_x \\
&= xmv_y - ymv_x \\
&= r\cos\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] - r\sin\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right] \\
&= rm\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - rm\frac{dr}{dt}\sin\theta\cos\theta + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}
\end{aligned}
$$

$$= r^2 m \cos^2\theta \frac{d\theta}{dt} + r^2 m \sin^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m \frac{d\theta}{dt}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= r^2 m \frac{d\theta}{dt}$$

と表されます。

201211-08

中心力～運動方程式

従って、θ 方向の式において

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{dL}{dt}=0$$

となる

即ち、

$$ma_\theta=0$$

は角運動量保存則を表している

ここで θ 方向の運動方程式に戻ると

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$r\neq 0$ とすると

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

となります。

$\frac{d}{dt}(\quad)$ の部分は前のスライドの角運動量の大きさ L を計算した結果と同じなので

$$\frac{dL}{dt}=0$$

と表されます。

即ち、$ma_\theta = 0$ は角運動量が保存していることを意味しています。

角運動量～例題

例題

質量 m の質点が xy 平面で半径 r_0 の円運動している。
$t=0$ で $(x,y)=(r_0,0)$ にあり、反時計まわりに角速度 ω で回転するとする。

1. 運動量 $\vec{p}=(p_x,p_y)$ を求めよ。

2. この運動における質点の角運動量 $\vec{L}$ を求めよ。

ここで角運動量の例題をやってみましょう。

このモデルは角速度 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=\mathrm{const.}$ の円運動になります。

ある時刻 t での位置ベクトル $\vec{r}$ は

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_0\cos\omega t \\ r_0\sin\omega t \end{pmatrix}$$

と表されます。

よって、速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

と表されます。

v_x, v_y を計算すると

$$v_x = \frac{d}{dt}\left(r_0 \cos \omega t\right) = r_0 \frac{d}{dt}\left(\cos \omega t\right)$$

$$= r_0 \left[-\sin \omega t \frac{d}{dt}(\omega t) \right]$$

$$= -r_0 \omega \sin \omega t$$

となり、

$$v_y = \frac{d}{dt}\left(r_0 \sin \omega t\right) = r_0 \frac{d}{dt}\left(\sin \omega t\right)$$

$$= r_0 \left[\cos \omega t \frac{d}{dt}\left(\omega t\right)\right]$$

$$= r_0 \omega \cos \omega t$$

となります。
従って運動量 $\vec{\boldsymbol{p}}$ は

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mr_0\omega \sin \omega t \\ mr_0\omega \cos \omega t \end{pmatrix} = \left(-mr_0\omega \sin \omega t, mr_0\omega \cos \omega t\right)$$

となります。

角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} r_0 \cos\omega t \\ r_0 \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -m r_0 \omega \sin\omega t \\ m r_0 \omega \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \cos\omega t \cdot m r_0 \omega \cos\omega t - r_0 \sin\omega t \cdot \left(-m r_0 \omega \sin\omega t\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m r_0^2 \omega \cos^2 \omega t + m r_0^2 \omega \sin^2 \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m r_0^2 \omega \end{pmatrix}$$

となります。

円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

ある時刻 t での位置は
$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$ とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

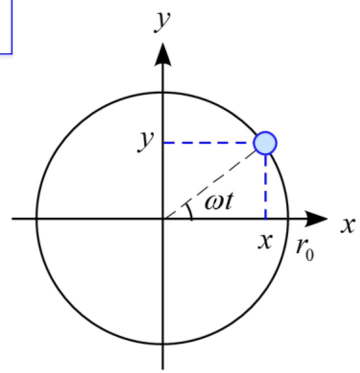
と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt}\left[r_0 \cos \omega t\right] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left[r_0 \sin \omega t\right] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。



ここで回転運動の例として円運動を取り上げます。
円運動の中で最もシンプルな等速円運動のモデルについて考えてみましょう。

このモデルは角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \mathrm{const.}$ の等速円運動になります。
よって、ある時刻 t の角度 θ は $\theta = \omega t$ と表すことができます。
従って、ある時刻 t での位置ベクトル $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos \omega t \\ r_0 \sin \omega t \end{pmatrix}$$

と表されます。

よって、速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

と表されます。
v_x, v_y を計算すると

$$v_x = \frac{d}{dt}\left(r_0 \cos\omega t\right) = r_0 \frac{d}{dt}\left(\cos\omega t\right)$$

$$= r_0 \left[-\sin\omega t \frac{d}{dt}\left(\omega t\right) \right]$$

$$= -r_0 \omega \sin\omega t$$

となり、

$$v_y = \frac{d}{dt}\left(r_0 \sin \omega t\right) = r_0 \frac{d}{dt}\left(\sin \omega t\right)$$

$$= r_0 \left[\cos \omega t \frac{d}{dt}\left(\omega t\right)\right]$$

$$= r_0 \omega \cos \omega t$$

となります。

円運動～等速円運動

従って、

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega\sin\omega t\right)^2 + \left(r_0\omega\cos\omega t\right)^2}$$

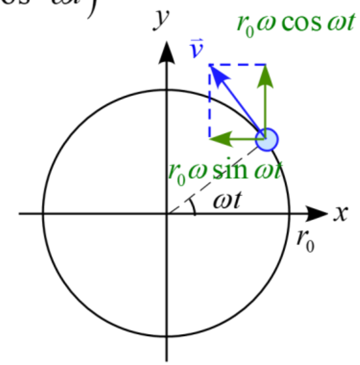
$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^2\sin^2\omega t + {r_0}^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right)}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^2}$$

$$= r_0\omega$$

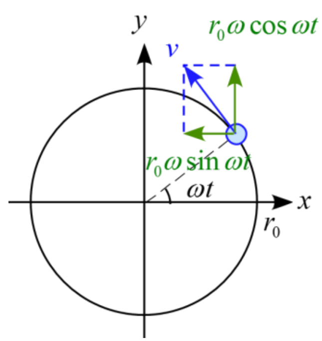
となる。



従って、速度の大きさ $|\vec{v}|$ は

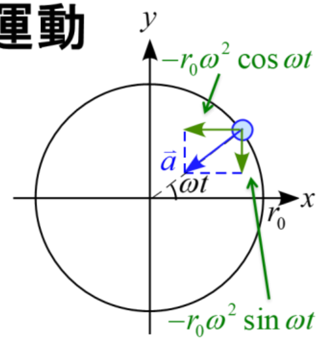
$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega\sin\omega t\right)^2 + \left(r_0\omega\cos\omega t\right)^2}$$

で計算されます。図において、速度 $\vec{v}$ は接線となっています。



また、x 成分は負なので矢印が左を向き、
y 成分は正なので矢印が上を向いています

円運動～等速円運動



加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}\left[-r_0\omega\sin\omega t\right] = -r_0\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}\left[r_0\omega\cos\omega t\right] = -r_0\omega^2\sin\omega t$$

と表される。

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega^2\cos\omega t\right)^2 + \left(-r_0\omega^2\sin\omega t\right)^2}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4\cos^2\omega t + r_0{}^2\omega^4\sin^2\omega t}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4} = r_0\omega^2$$

となる。

さらに加速度 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ を計算すると

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dv(t)}{dt} \\ \dfrac{dv(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

と表されるので

a_x, a_y を計算すると

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(-r_0\omega \sin \omega t\right) = -r_0\omega \frac{d}{dt}\left(\sin \omega t\right)$$

$$= -r_0\omega \left[\cos \omega t \frac{d}{dt}\left(\omega t\right)\right]$$

$$= -r_0\omega^2 \cos \omega t$$

となり、

$$a_y = \frac{d}{dt}\left(r_0\omega \cos \omega t\right) = r_0\omega \frac{d}{dt}\left(\cos \omega t\right)$$

$$= r_0\omega \left[-\sin \omega t \frac{d}{dt}\left(\omega t\right)\right]$$

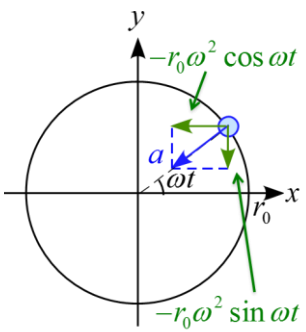
$$= -r_0\omega^2 \sin \omega t$$

となります。

従って、加速度の大きさ $|\vec{a}|$ は

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega^2 \cos\omega t\right)^2 + \left(-r_0\omega^2 \sin\omega t\right)^2}$$

で計算されます。図において、加速度 $\vec{a}$ は中心方向となっています。



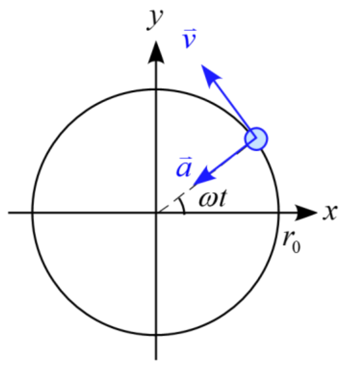
また、x 成分は負なので矢印が左を向き、
y 成分は負なので矢印が下を向いています

円運動～等速円運動

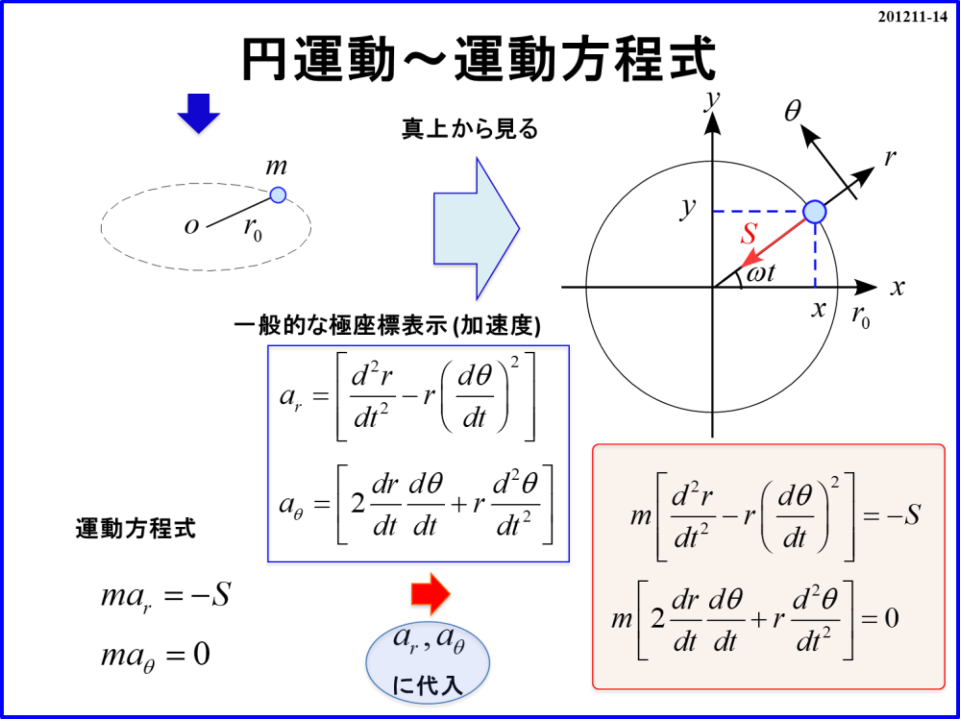
等速円運動 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定)

$$|\vec{v}| = v = r_0\omega$$

$$|\vec{a}| = a = r_0\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$

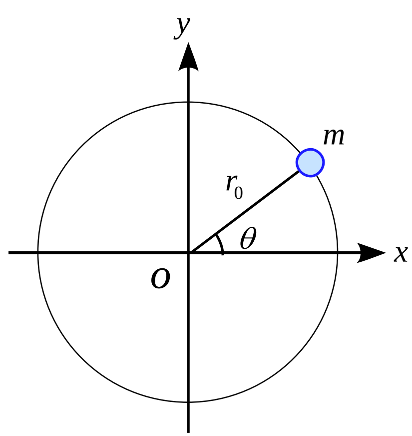


計算結果をまとめたものになります。
速度 $\vec{v}$ の向きと加速度 $\vec{a}$ の向きは押さえておきましょう。

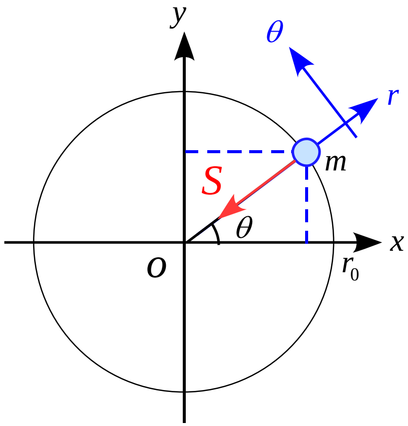


さて、円運動について、運動方程式はどうなるか検討してみましょう。

質量 m の物体に長さ r_0 の軽い糸を付けて回転運動させたとします。
この回転運動を真上から見て、回転運動をしている面を $x-y$ 平面と設定すると
図のようになります。



作用する力を書き込むと



$x - y$ 平面内で作用している力は「張力 S 」となります。
さらに、極座標を設定すると運動方程式は

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$

と表されます。
一般的な a_r, a_θ を代入すると

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

となります。

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定)なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = S$$

$$mr_0\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

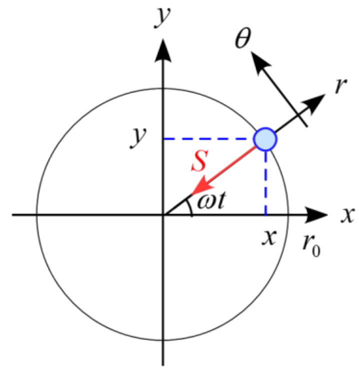
角速度 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定)の等速円運動

とすると、

$$\boxed{mr_0\omega^2} = S$$

$$ma = S$$

中心方向に加速度があると考えられる



ここで $r = r_0$ で一定なので $\frac{dr}{dt} = 0$ となります。

従って、運動方程式は

$$m\left[0 - r_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -S$$

$$m\left[0 + r_0\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

となります。

$$mr_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=S$$

$$mr_0\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$$

となります。

r 方向(動径方向)の式において $\frac{d\theta}{dt}=\omega$ を代入すると

$$mr_0\omega^2=S$$

となり、ここで $r_0\omega^2=a$ と書くと

$$ma=S$$

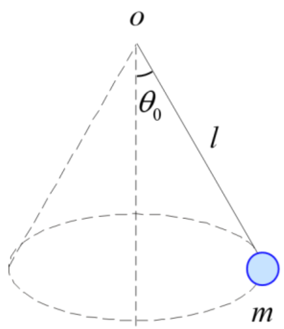
と表され、中心方向に加速度 a があると見なすことができます。
この加速度 a を「向心加速度」と呼びます。

201211-16

円運動～例題

例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ_0 であるとする。
以下の問いに答えよ。



1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

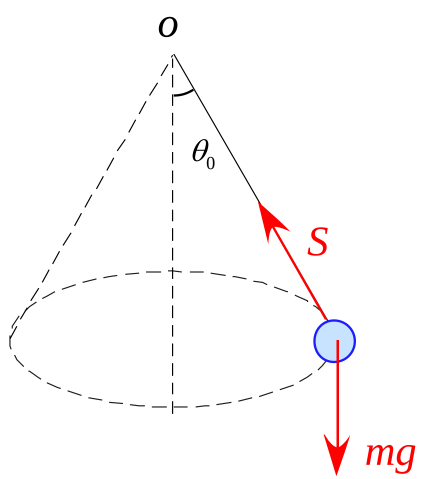
2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

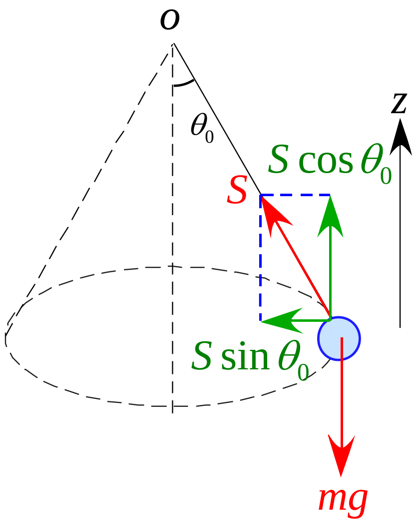
と表すことができる。
糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円錐振り子のモデルになります。
物体に作用する力の矢印を書き込むと



物体に作用している力は「重力 mg 」と「張力 S 」となります。

鉛直上向きに z 軸を設定し、作用する力の成分を分解すると



従って、z 軸に対する運動方程式は

$$ma_z = S\cos\theta_0 - mg$$

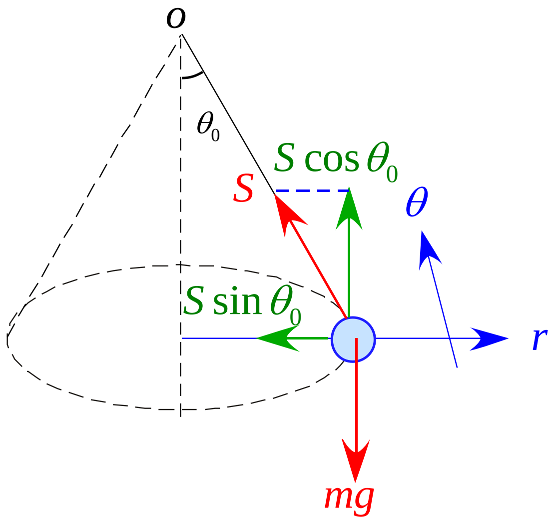
と表され、水平面内での運動なので $\boldsymbol{a_z = 0}$ より

$$0 = S\cos\theta_0 - mg$$

$$S = \frac{mg}{\cos\theta_0}$$

となります。

水平面内での運動方程式は図より



$$ma_r = -S\sin\theta_0$$

$$ma_\theta = 0$$

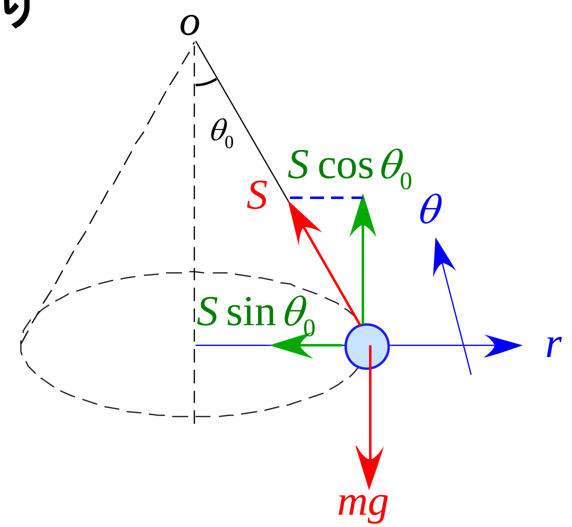
となります。
極座標の加速度の一般形を代入すると

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -S\sin\theta_0$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

となります。

ここで回転運動をの半径は $\boldsymbol{r = l\sin\theta_0}$ で一定なので $\boldsymbol{\dfrac{dr}{dt} = 0}$ より



$$-ml\sin\theta_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -S\sin\theta_0$$

$$ml\sin\theta_0\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

となります。

速度 $\boldsymbol{\vec{v}}$ について、極座標の一般形 $\boldsymbol{v_r = \dfrac{dr}{dt}, v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}}$ を利用すると

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = l\sin\theta_0\frac{d\theta}{dt}$$

より

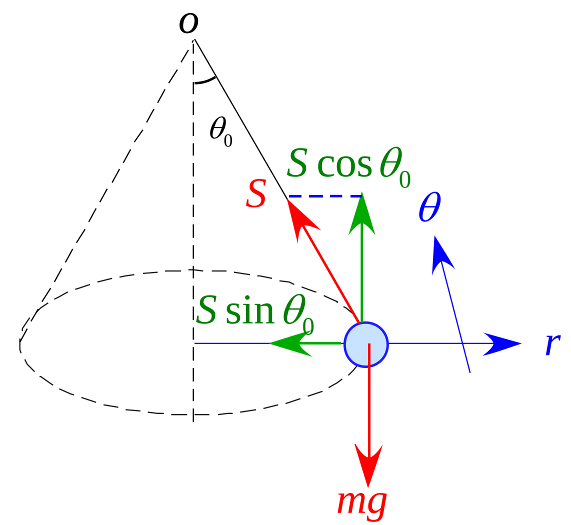
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l\sin\theta_0}$$

となります。
これを動径方向の運動方程式に代入すると

$$ml\sin\theta_0\left(\frac{v_\theta}{l\sin\theta_0}\right)^2 = S\sin\theta_0$$

$$m\frac{v_\theta^2}{l\sin\theta_0} = S\sin\theta_0$$

$$v_\theta^2 = \frac{Sl}{m}\sin^2\theta_0$$



となります。

$$S = \frac{mg}{\cos\theta_0}$$ **を代入して**

$$v_\theta^2 = \frac{mg}{\cos\theta_0}\frac{l}{m}\sin^2\theta_0$$

$$v_\theta = \sqrt{\frac{gl}{\cos\theta_0}}\sin\theta_0$$

となります。

周期 T については

$$v_\theta T = 2\pi r$$

$$T = \frac{2\pi r}{v_\theta} = \frac{2\pi l\sin\theta_0}{\sqrt{\frac{gl}{\cos\theta_0}}\sin\theta_0}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta_0}{g}}$$

となります。

円運動～例題

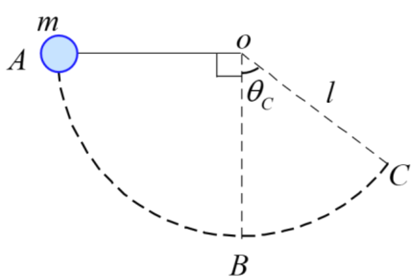
例題

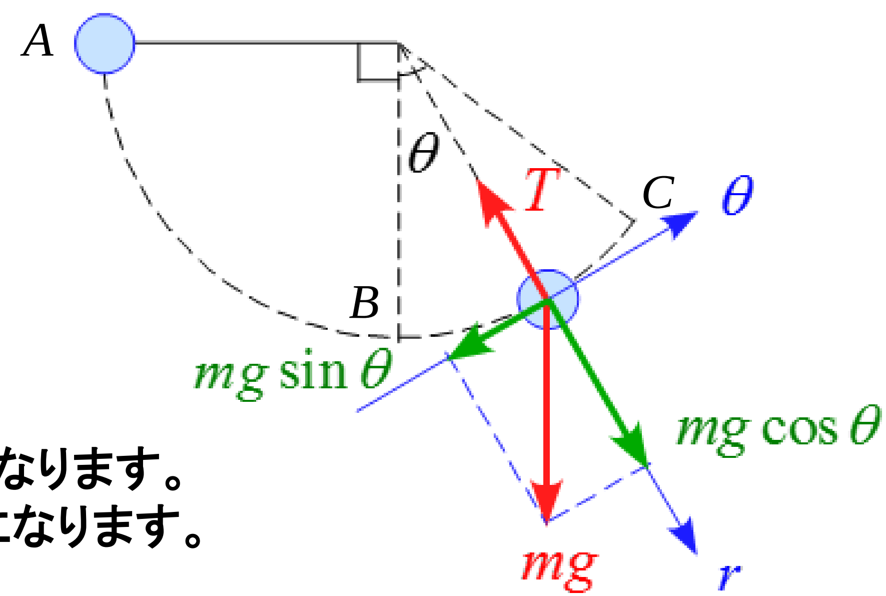
図のような円運動のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量 m はである。
物体を水平を状態にして放し、円運動させたとする。
以下の問に答えよ。
ある時刻 t で糸と鉛直線のなす角を θ として用いてよい。

1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 最下点 B での糸の張力 T_B を求めよ。

3. 点 C での鉛直線となす角を θ_C とする。
   糸の張力 T_C を求めよ。





作図は運動の途中が良いです。(B – C間辺り)

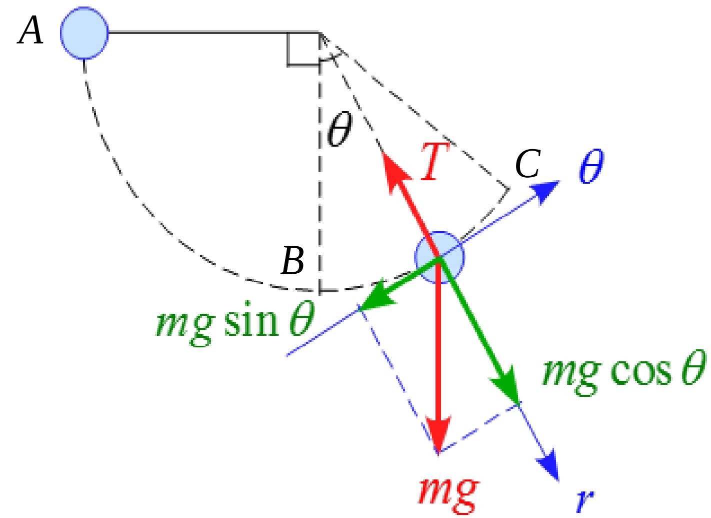
作用している力は「重力 mg 」と「糸の張力 T 」になります。
極座標 r, θ を設定し、成分を分解した図が右図になります。
従って、運動方程式は

$$ma_r = mg\cos\theta - T$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

と表されます。

一般的な a_r, a_θ を代入すると



$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = mg\cos\theta - T$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

となります。

ここで、$r = l$ (一定)なので $\dfrac{dr}{dt} = 0$ となります。

従って、運動方程式の2式は

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

となります。

まず、偏角方向(θ 方向)の運動方程式から「仕事とエネルギーの関係式」を導きます。

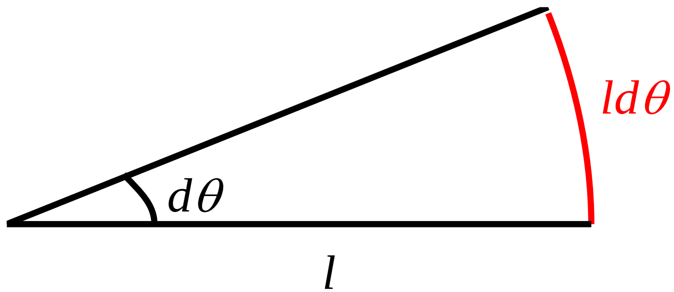
その後、動径方向(r 方向)の運動方程式から張力 T を求めます。

偏角方向(θ 方向)の運動方程式から「仕事とエネルギーの関係式」を導く前に下準備をします。

極座標表示における θ 方向の速度 v_θ は一般的に $v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$ と表されるので
モデルの設定 $r = l$ を用いると

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l} \qquad d\theta = \frac{v_\theta}{l}dt$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_\theta}{l}\right) = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$



となります。
偏角方向(θ 方向)の運動方程式の両辺を変位 $ld\theta$ で積分すると

$$\int ml\frac{d^2\theta}{dt^2}ld\theta = \int(-mg\sin\theta)ld\theta$$

となります。下準備したものを代入すると

$$\int ml\frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}l\frac{v_\theta}{l}dt = \int(-mg\sin\theta)ld\theta$$

となります。

さらに整理すると

$$\int m\frac{dv_\theta}{dt}v_\theta dt=\int(-mg\sin\theta)ld\theta$$

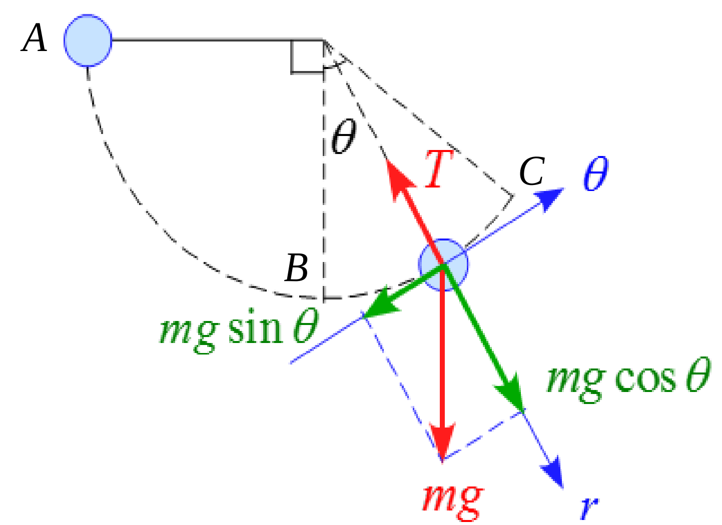
$$\boxed{\int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right)dt=\int(-mg\sin\theta)ld\theta}$$

となります。
ここで条件を適用します。
問題の条件は

$\boldsymbol{t=0}$ で $\boldsymbol{\theta(0)=-\frac{\pi}{2}}$,$\boldsymbol{v_\theta(0)=0}$

$\boldsymbol{t=t_B}$ で$\boldsymbol{\theta(t_B)=0, v_\theta(t_B)=v_B}$

なので



$$\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2\right]_0^{v_B}=mgl\left[\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}m\cdot0^2=mgl\left[\cos0-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2=mgl$$

となり、所謂「**エネルギー保存則の式**」になります。

従って、点Bでの速度v_Bは

$$v_B^2 = 2gl$$

$$v_B = \sqrt{2gl}$$

となります。
ここで、動径方向の運動方程式は

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$$

であるので、張力 T は

$$T = mg\cos\theta + ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta + ml\left(\frac{v_\theta}{l}\right)^2$$

$$\boxed{T = mg\cos\theta + m\frac{v_\theta^2}{l}}$$

となります。

従って、点Bでの条件である $\theta = 0$ と v_B を代入すると

$$T_B = mg\cos 0 + m\frac{v_B^2}{l} = mg + m\frac{2gl}{l} = 3mg$$

となります。

点Cでも同様に赤枠の式に条件を適用すると

$t = 0$ で $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$,$v_\theta(0) = 0$

$t = t_C$ で$\theta(t_C) = \theta_C, v_\theta(t_C) = v_C$

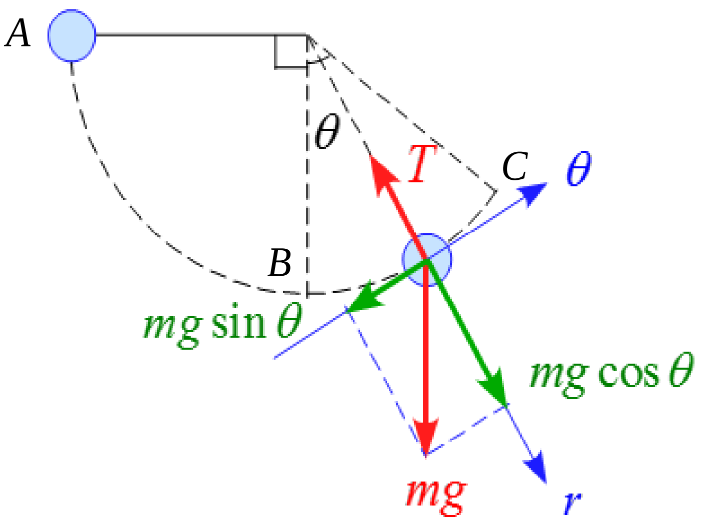
なので

$$\boxed{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right)dt = \int(-mg\sin\theta)\,ld\theta}$$

$$\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2\right]_0^{v_C} = mgl\left[\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{v_C}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mgl\left[\cos\theta_C - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgl\cos\theta_C$$



となります。

従って、点Cでの速度v_Cは

$$v_C^2 = 2gl\cos\theta_C$$

$$v_C = \sqrt{2gl\cos\theta_C}$$

$$\boxed{T = mg\cos\theta + m\frac{v_\theta^2}{l}}$$

となります。
動径方向の運動方程式にも同様に赤枠の式に条件を適用します。

点Cでの条件は $\theta = \theta_C$ と $v_\theta = v_C$ であるから

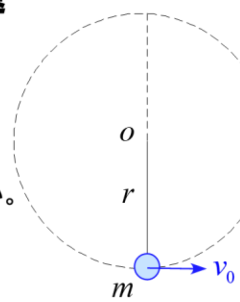
$$T_C = mg\cos\theta_C + m\frac{v_C^2}{l} = mg\cos\theta_C + m\frac{2gl\cos\theta_C}{l} = 3mg\cos\theta_C$$

となります。

円運動～例題

例題

図のような円運動のモデルを考える。
糸の長さは r 、物体の質量は m である。
最下点で水平方向に初速度 v_0 を与えたとき
以下の問に答えよ。
ある時刻 t で糸と鉛直線のなす角を θ として用いてよい。



1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 物体が1回転するために必要な初速度 v_0 の条件を求めよ。

物体が1回転する条件の検討になります。
この例題では「糸」に設置されていますが、
「軽い棒」に設置されているモデルもあります。
その場合は条件が異なるので注意が必要になります。

最高点において

糸の場合 : 張力 $T \geq 0$ が必要
軽い棒の場合 : 速度 $v \geq 0$ が必要

となります。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{r}$ で積分

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

仕事とエネルギーの関係

左側から $\vec{r}$ で外積

t で積分

モーメントと角運動量の関係

力積と運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

角運動量

モーメント

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

さて、ここでもう一度運動方程式から導かれる関係を見てみましょう。

力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- 問題文で指定されている場合はそれを利用する
- 指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- 一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
- 直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

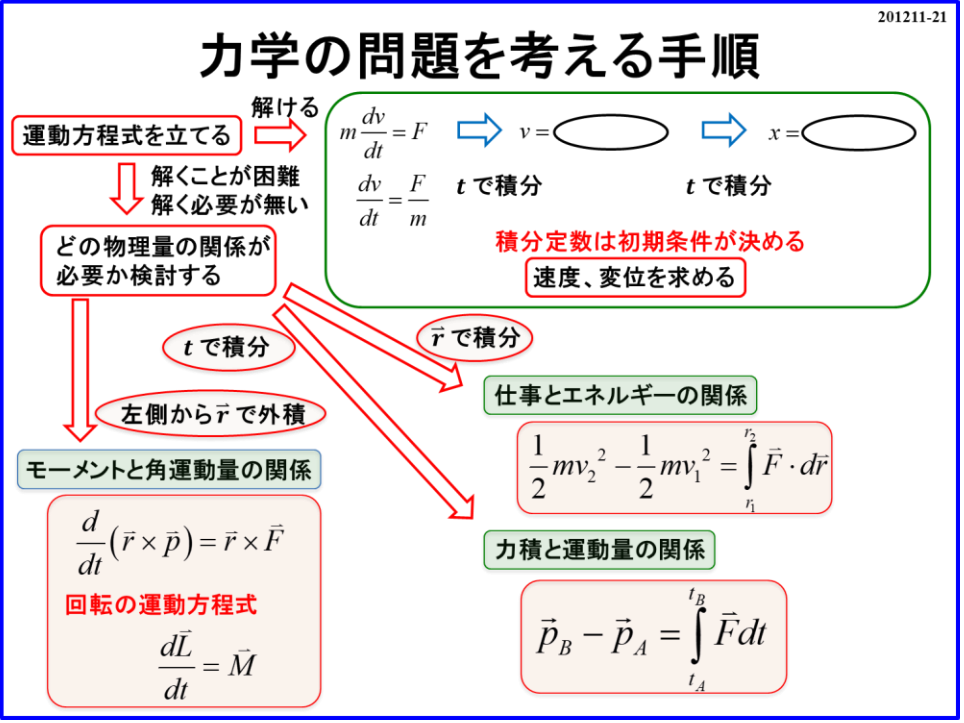
力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら $ma = F$ の F の部分を書き込む

力学のまとめになります。

力学の問題は手順通りの流れで進めることが大事です。
まずは手順に従って運動方程式を立てます。



運動方程式ができた後は
この「運動方程式を解くかどうか」の検討を行います。

「すぐ解ける場合」は加速度 $\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$ の形にし、t で積分して速度 v を計算し、
さらに t で積分して変位 x を計算します。
この積分は不定積分となるので積分定数の処理ときちんと行う必要があります。
積分定数は初期条件により決定できます。

「解くことが困難」あるいは「解かない方が早い場合」「解く必要が無い場合」は
どの物理量の関係が求められているか検討します。
それぞれ問われている物理量の関係式を利用し、物理量を求めることになります。

力学の講義を終えて

取り扱った内容

- 加速度 / 速度 / 変位
- 万有引力の法則
- ニュートンの運動の法則
- 仕事とエネルギー
- エネルギー保存則
- 運動量と力積
- 運動量保存則
- 力のモーメント
- 角運動量
- 角運動量保存則
- 円運動

取り扱っていない内容

- 単振動 / 単振り子
- ケプラーの法則
- 剛体の運動
- 慣性モーメント

本講義の力学で取り扱った内容と取り扱っていない内容のリストになります。
かなりの部分を扱ってきましたが、「単振動 / 単振り子」「ケプラーの法則」
「剛体の運動」「慣性モーメント」は扱っていないので機会があったら学習してみて下さい。