電磁気学

電磁気学

電気及び磁気に関する物理現象 → 法則 →(利用) 電気モーター ラジオ テレビ コンピューター 電子機器 など

電磁気学の歴史

時代	誰が	内容
B.C. 2000頃	中国の文献	磁気の存在の記述あり
B.C 700頃	古代ギリシャ人	電気的、磁気的現象の観察（琥珀の帯電現象）
1600年	ウィリアム・ギルバート	帯電現象が一般的な現象と発見
1785年	シャルル・クーロン	電気力が逆2乗法則に従うことを発見
19世紀初頭		電気と磁気が互いに関係ある現象を発見
1820年	ハンス・エルステッド	電流の流れる回路付近にコンパスをおくと、磁針の向きが変ることを発見
1831年	マイケル・ファラデー ジョセフ・ヘンリー	磁石の近辺で電線を運動させると、電線に電流が発生することを発見
1873年	ジェームス・クラーク・マクスウェル	電磁気学の法則を完成（Maxwellの方程式）
1888年頃	ハインリッヒ・ヘルツ	電磁波を発生させ、真空中でも電磁波が伝播することを立証

ここからは電磁気学の分野になります。
電磁気学は「電気」と「磁気」に関する物理現象について扱います。
電磁気学での法則は様々な機器に活用されています。
電磁気学では力学より少し覚えるべき項目が多くなりますが、
覚えることよりも理解することに力を注いで下さい。

電磁気学の歴史の始まりはB.C.2000年頃に中国の文献に「磁気の存在に関する記述」からになります。また、B.C.700年頃に古代ギリシア人が「琥珀の帯電現象」を観測しています。
電磁気学が進むのは、1785年にクーロンが発見した「クーロンの法則」からであり、
19世紀になり電気と磁気の関係の研究がなされてきました。
そして、1873年にマクスウェルの「Maxwellの方程式」で完成することになります。
このMaxwellの方程式は力学における運動方程式に相当するくらい重要な法則になります。

Maxwellの方程式 + 電荷の保存則

積分形

$$\int_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \left(\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

微分形

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

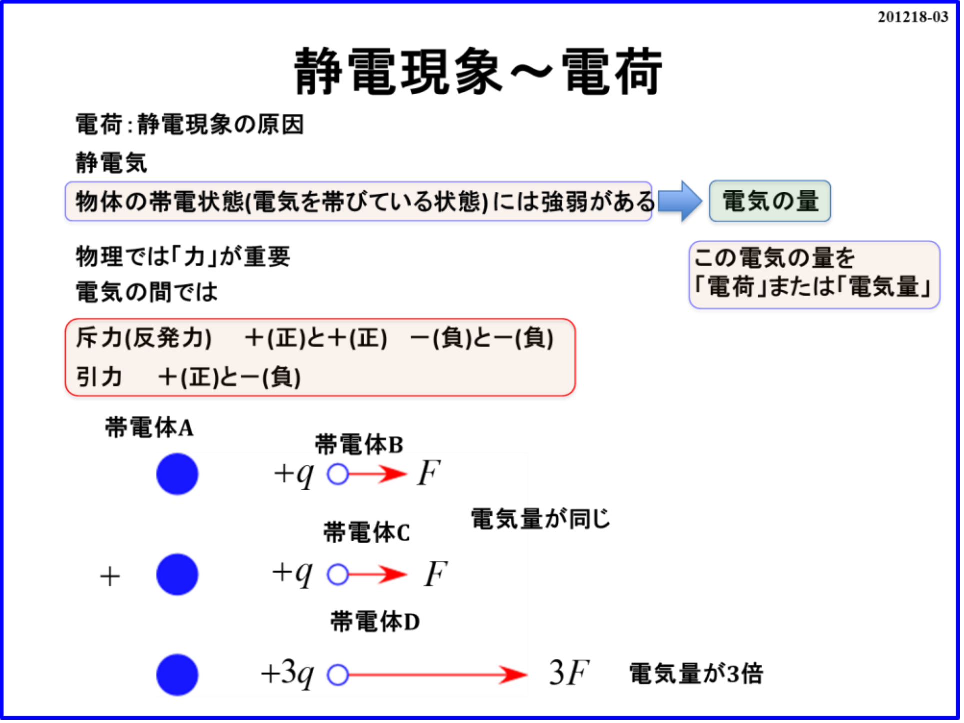
電荷の保存則

$$\int_S \vec{i}\cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

$$\mathrm{div}\ \vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ここに、**Maxwellの方程式**と**電荷保存則の式**を示します。
左側が積分形で右側が微分形になります。
それぞれは物理的には同じ意味を表しています。

Maxwellの方程式の4つの式と電荷保存則の1つの式で電磁気学の現象は全て説明ができます。これらの式の中では見たことが無い記号があるかと思います。
全ての式をこの講義内で扱うわけではありませんし、現時点で全ての式を覚える必要もありません。必要に応じて随時、学習して行きましょう。



それでは実際に進めて行きましょう。
電磁気学は用語が多く出てくるので一つ一つ押さえておきましょう。

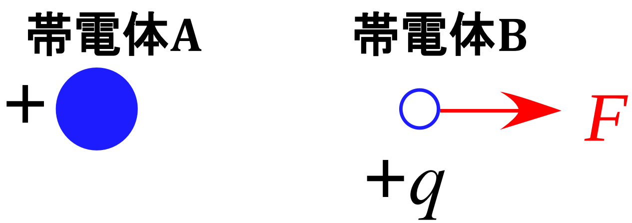
物体が電気を帯びている状態を「帯電状態」といいます。
この帯電には強弱があり、帯電している電気の量を「電荷」あるいは「電気量」と言います。

物理では「力」が重要です。
ようやく「力学」が終わったのに、また「力が出てくるの？」と思った人もいるかも
知れませんが、また「力」が出てきます。
物理の分野なんてどれも「力がどうなっているか？」が基本にあるのです。
ただ、分野ごとに「見ている・考えている領域」が異なっているだけなのです。

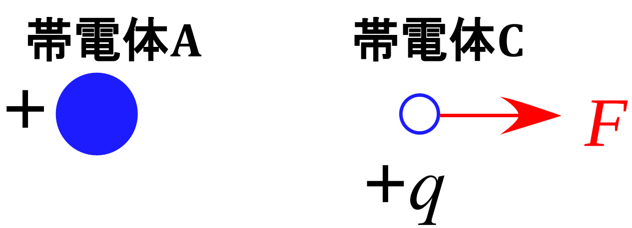
さて、話を戻すと
「電気の力」の間には向きが存在します。
「＋と＋」或いは「－と－」の様に同符号の場合は「斥力(反発力)」となります。
また、「＋と－」或いは「－と＋」の様に異符号の場合は「引力」となります。

ここで帯電体Aから帯電体Dを考えます。

帯電体Aがあるところに電荷 q である帯電体Bを持ってくると

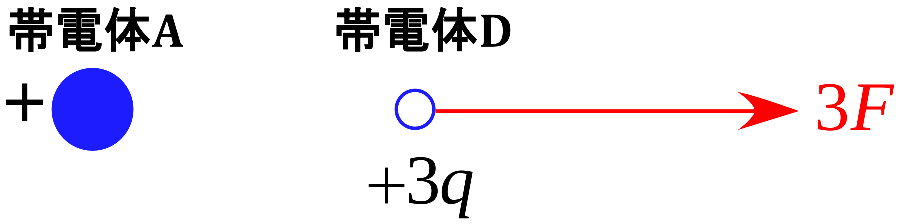


となります。
このとき、帯電体Bが受ける力を F とします。
また、帯電体Aがあるところに別の帯電体Cを持ってきます。
帯電体Cも電荷 q であったとすると



となります。
このとき、帯電体Cが受ける力は F となります。

さらに帯電体Aがあるところに帯電体Dを持ってきます。
帯電体Dの電荷が $3q$ であったとすると



となります。
このとき、帯電体Dが受ける力は $3F$ となります。
これらのことが意味するのは

・受ける力は帯電体が変わっても電荷が同じであれば同じ力を受ける。

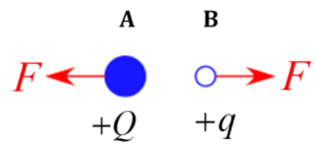
・受ける力は帯電体の電荷に比例して大きくなる。

となります。

201218-04

電荷～クーロンの法則

電荷の定義を考える
右図の様な2つの電荷があるとき
A, Bはそれぞれ斥力 F を受ける
比例定数を α とおくと



$$F = \alpha \cdot Qq$$

F は Q にも q にも比例する

と表すことができる
この比例定数 α を見出した人

フランスの物理学者
Charles - Augustin de Coulomb
(シャルル‐オーギュスタン･ド･クーロン)

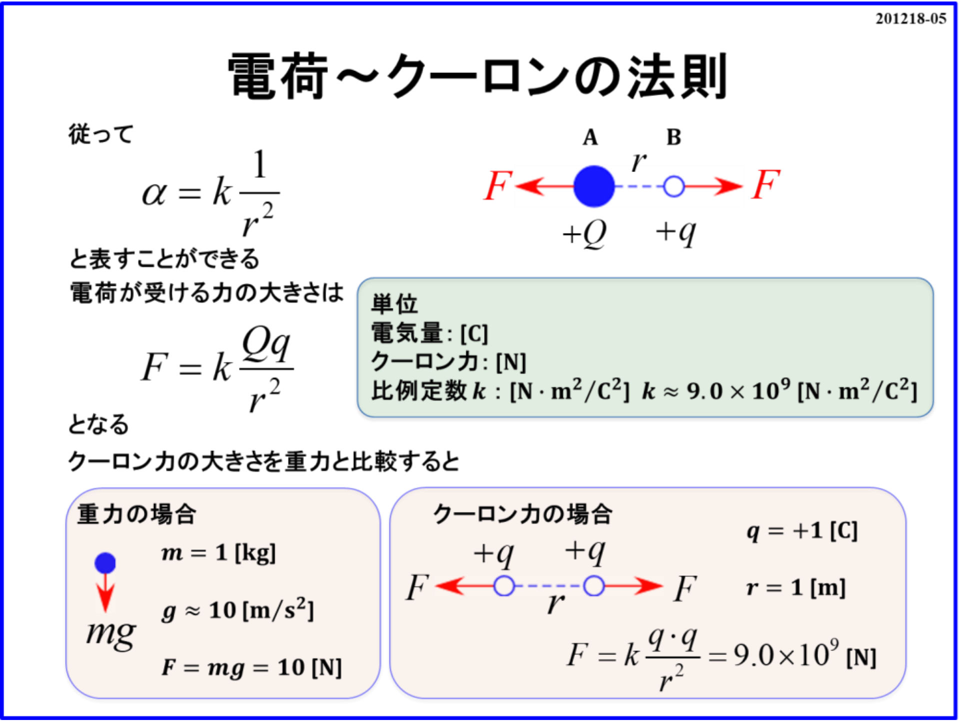
1777年、細い絹糸のねじれのバランスを利用して、1/100,000 グラムの微少な力の変化を測定できるねじれ秤(はかり)を発明した。
このはかりを利用して、帯電した小球二個の間に働く引力や反撥力を測定した。

「ねじればかり」を用いて、
この比例定数 α がABの距離 r の2乗に反比例することを見出した

前のスライドについて式で表すことを考えると、2つの帯電体ABにおいて作用する力は「**帯電体Aの電荷 Q に比例し、帯電体Bの電荷 q にも比例する**」ことになります。
従って、その比例定数を α として式で表すと

$$F = \alpha Qq$$

と表すことができます。
この比例定数 α について詳細に測定した人がフランスの物理学者「クーロン」です。
クーロンは比例定数 α が「**2つの帯電体ABの距離 r の2乗に反比例すること**」を発見しました。



従って、比例定数 α は

$$\alpha = k\frac{1}{r^2}$$

と表すことができます。

k は比例定数で、この比例定数を「クーロン定数」と呼びます。

よって、作用する力の大きさは

$$F = k\frac{Qq}{r^2}$$

と表すことができます。

ここで単位について話をすると、電気量(電荷)の単位は「 C (クーロン)」で表します。
また、作用する力(クーロン力)の単位は「力」なので力学の時と同様に「 N (ニュートン)」を用います。
比例定数(クーロン定数) k は値が 9.0×10^9 で「 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$ 」が単位となります。
この単位は $F = k\frac{Qq}{r^2}$ を計算したときに単位が「 N 」となるようになっています。

ここでクーロン力の大きさがどれくらいなものであるか重力と比較してみましょう。

質量 $m = 1\ \mathrm{kg}$ にかかる重力 F_g を計算してみると

$$F_g = mg = 1 \times 10 = 10\ \mathrm{N}$$

となります。
g は計算を簡単にするために $10\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ としました。
一方、$1\ \mathrm{m}$ 離れた2つの電荷 $1\ \mathrm{C}$ に作用する力 F_C は

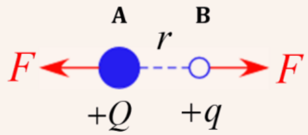
$$F_C = k\frac{Qq}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \frac{1 \cdot 1}{1^2} = 9.0 \times 10^9\ \mathrm{N}$$

となります。
約 10^9 倍違うことがわかります。
実は重力って物理の世界では「ものすごく弱い力」なのです。
だから面白いんですけどね。

クーロンの法則

クーロンの法則

帯電体A, Bの体積が無視できるほど
小さく「点電荷」とみなせるとき
2つの電荷間に働く力は



$$F = k\frac{Qq}{r^2}$$

と表せ、この力を「クーロン力」と呼ぶ

同符号の場合：斥力（反発力）
異符号の場合：引力

まとめると、帯電体ABが点電荷と見なせる場合
2つの電荷には

$$F = k\frac{Qq}{r^2}$$

の力が作用します。
この力 F を「クーロン力」と呼び、比例定数 k を「クーロン定数」と呼びます。
このクーロン力は「2つの点電荷を結ぶ直線上に作用」し、
2つの点電荷が「同符号の場合は斥力、異符号の場合は引力」として力が作用します。
クーロン力の式 $F = k\frac{Qq}{r^2}$ は覚えて欲しい式ではありますが、電磁気学の分野の式で
超重要な式という訳ではありません。
実は「クーロン力の式」は後で解説する「ガウスの法則」に組み込まれます。

クーロンの法則～例題(原子)

陽子と電子が 1.0×10^{-8} m 離れた位置にある。
このときの電子と陽子が引き合う力の大きさ $|\vec{F}|$ を求めよ。
但し、電子の電荷を 1.6×10^{-19} C 、クーロン定数を $9.0\times10^{9}\ \mathrm{N}\cdot{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{C}^2}$ とする。

ヘリウムの原子核は2個の陽子と2個の中性子で構成されていて、
大きさは約 2.0×10^{-15} m である。
ヘリウムの原子核内の陽子に作用しているクーロン力 $|\vec{F}|$ を求めよ。
但し、電子の電荷を 1.6×10^{-19} C 、クーロン定数を $9.0\times10^{9}\ \mathrm{N}\cdot{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{C}^2}$ とする。

クーロン力 F を求める計算問題です。
単位がどうなるのか考えながら計算してみましょう。

陽子は「$+$ の電荷 $+e$ を持つ粒子」、電子は「$-$ の電荷 $-e$ を持つ粒子」になります。
従って、

$$|\vec{F}| = k\frac{Qq}{r^2} = \left|9.0\times10^{9}\times\frac{1.6\times10^{-19}\times\left(-1.6\times10^{-19}\right)}{\left(1.0\times10^{-8}\right)^2}\right| = 2.3\times10^{-12}\ \ \mathrm{N}$$

2個の陽子によるクーロン力は

$$|\vec{F}| = k\frac{Qq}{r^2} = 9.0\times10^{9}\times\frac{1.6\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}}{\left(2.0\times10^{-15}\right)^2} = 58 \quad \mathrm{N}$$

となります。

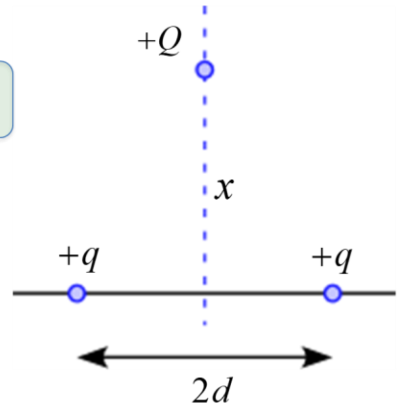
クーロンの法則～例題

クーロンの法則～例題

図のように、正の電気量 $+q$ をもつ2つの
点電荷を距離 $2d$ 離して固定する
この2つの点電荷を結ぶ線分の垂直二等分線上に
$+Q$ の点電荷を置くとき、この点電荷が
受ける力が最も大きくなる場所 x を考えよ

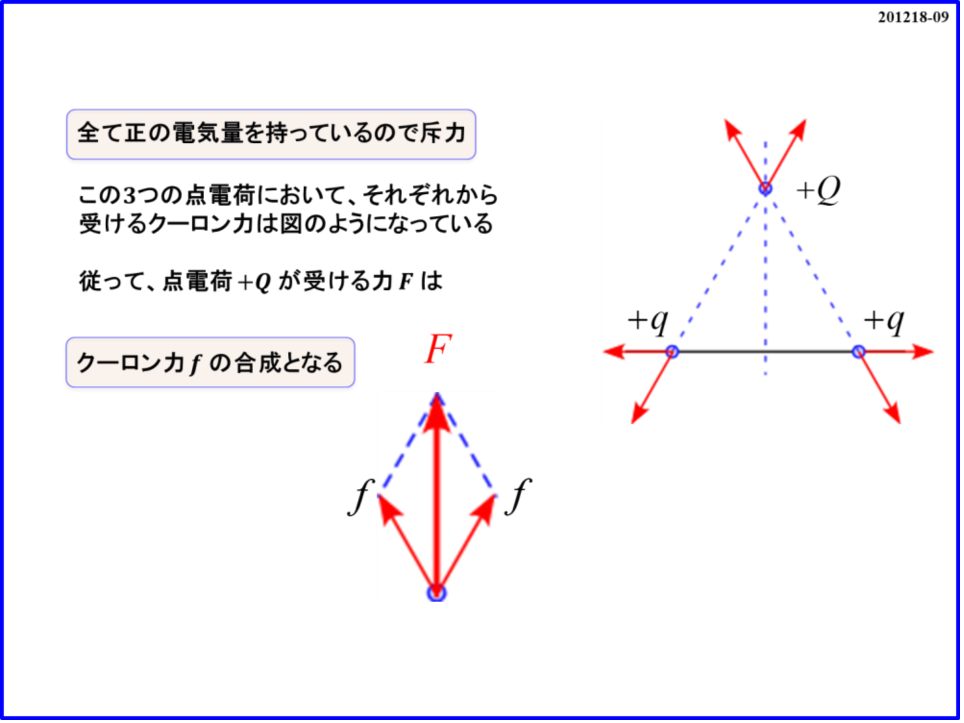
この問題を考えるにあたって、以下の設問に
従って検討してみよう

1. 点電荷 $+Q$ が2個の点電荷から受ける力を
図に書き込め。

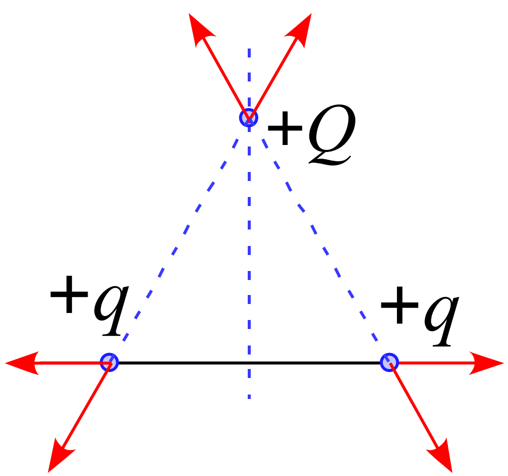


クーロンの法則を利用した例題になります。

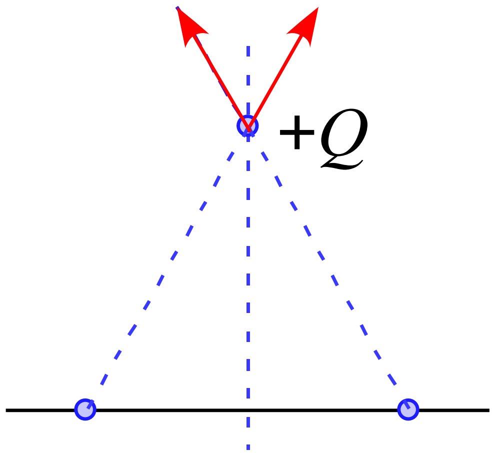
$+q$ の点電荷2個を結ぶ直線の垂直二等分線上に $+Q$ の点電荷を置いた時、
$+Q$ の点電荷が受ける力 F が最大となるところを検討します。
まずはクーロン力がそれぞれどのように作用しているか図で表してみましょう。



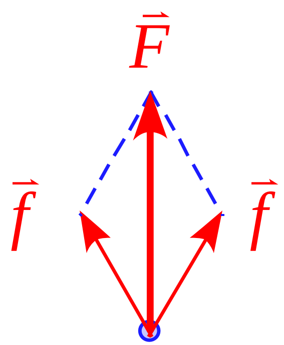
それぞれの点電荷から他の2つの点電荷に対してクーロン力が作用し合うので
図のようになります。



ここで、$+Q$ の点電荷に着目すると、



図のように2つのクーロン力を受けることになります。
「力」は「ベクトル量」です。よって「重ね合わせの原理」が利用でき



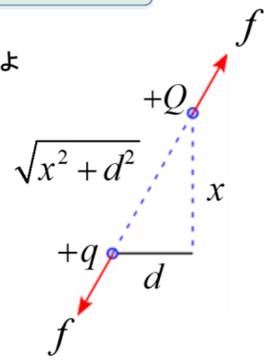
図のように2つの $\vec{f}$ で合成された $\vec{F}$ を求めることになります。

点電荷 $+Q$ が受ける力 F を求めて、それの最大値を探れば良い

2. この2つの点電荷のうち1つから受ける力 f を求めよ

$$f = k\frac{Qq}{r^2} = k\frac{Qq}{\left(\sqrt{x^2+d^2}\right)^2}$$

$$= k\frac{Qq}{x^2+d^2}$$



まずは f から計算していきましょう。
2つの点電荷に作用するクーロン力 f は

$$f = k\frac{Qq}{r^2} = k\frac{Qq}{\left(\sqrt{x^2+d^2}\right)^2} = k\frac{Qq}{x^2+d^2}$$

となります。
2点間の距離 r は三平方の定理より計算できます。

201218-11

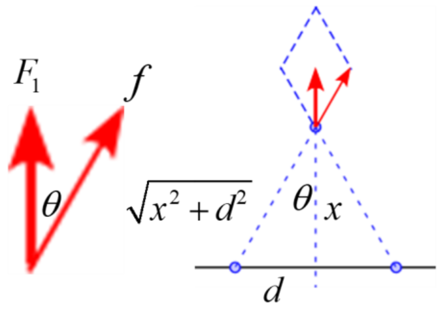
3. この2つの点電荷から受ける力 F を求めよ

求める力 F は

$$F=2F_1=2f\cos\theta$$

ここで、

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$



従って、

$$F=2f\cos\theta=2k\frac{Qq}{x^2+d^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$=\frac{2kQqx}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

続いて、F を計算する訳ですが、f 1つ分の力 F_1 を使って表すと

$$F=2F_1=2f\cos\theta$$

となります。
F_1 と f のなす角は θ としています。
また、なす角 θ については

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

と表すことができます。

従って

$$F = 2f\cos\theta = 2k\frac{Qq}{x^2+d^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$= 2k\frac{Qqx}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

となります。

4. この力が最も大きくなる場所 x はどこか求めよ。

F が最大となるのは

$$\frac{dF}{dx}=0$$

となるところであるから

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{2kQqx}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$=2kQq\left\{\left(x^2+d^2\right)^{-\frac{3}{2}}+x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x^2+d^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right\}$$

この F の最大値について検討すると、

F が最大となるのは $\frac{dF}{dx}=0$ の極値となるところであるので

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\left[2k\frac{Qqx}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=2kQq\left\{\left(x^2+d^2\right)^{-\frac{3}{2}}+x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x^2+d^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right\}$$

となります。

$$= 2kQq\left\{\left(x^2+d^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2\cdot\left(x^2+d^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2kQq}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left\{x^2+d^2-3x^2\right\}$$

$$= \frac{2kQq}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(d^2-2x^2\right)$$

従って、最大値となる場所 x は

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

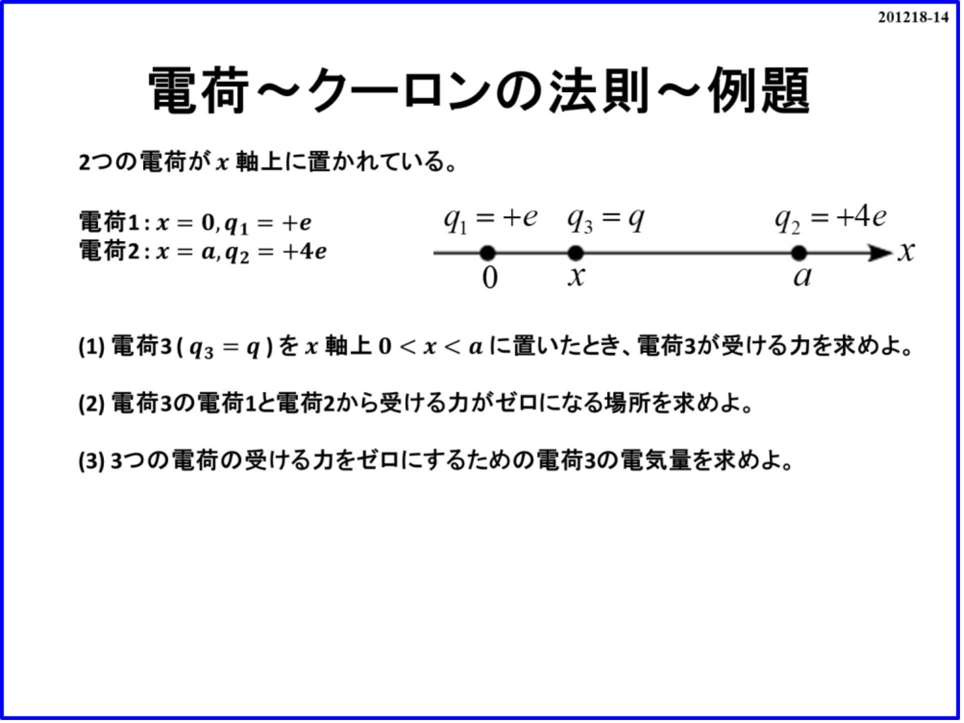
整理すると

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2kQq}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(d^2-2x^2\right)$$

となり、$\frac{dF}{dx} = 0$ となるのは $x > 0$ より

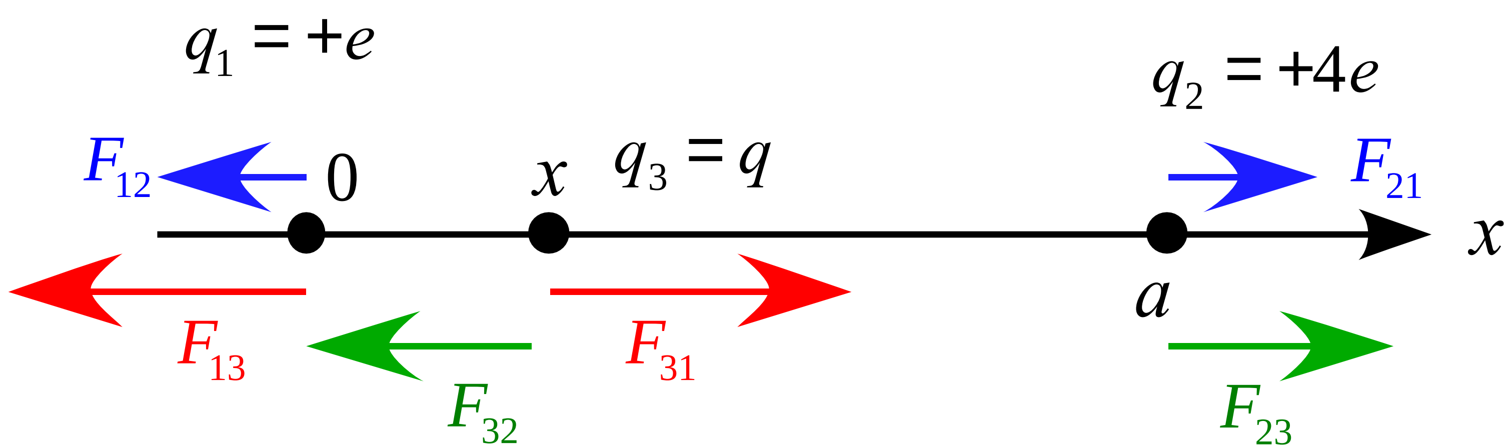
$$x = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

となります。

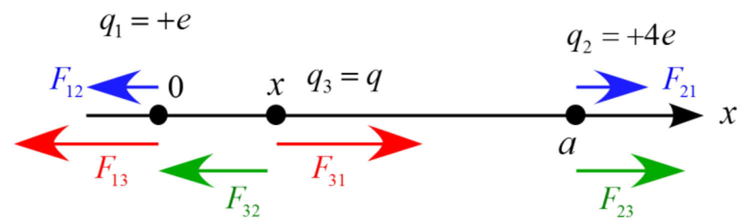


「F_{AB} AがBから受ける力」と表すとする

それぞれの電荷に作用するクーロン力を書き込んだ図になります。
同じ色が作用反作用の関係になっています。



それぞれの電荷に作用するクーロン力は



$$F_1 = F_{12} + F_{13} = -k\frac{q_1 q_2}{a^2} + \left(-k\frac{q_1 q_3}{x^2}\right)$$

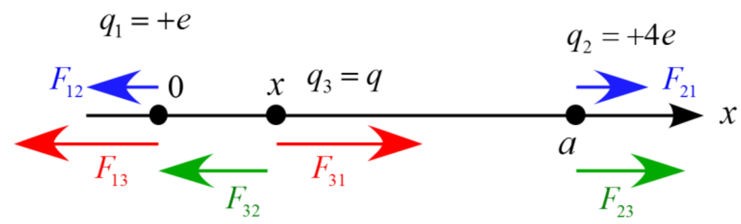
$$= -k\frac{e \cdot 4e}{a^2} + \left(-k\frac{e \cdot q}{x^2}\right) = k\left(-\frac{4e^2}{a^2} - \frac{eq}{x^2}\right)$$

$$F_2 = F_{21} + F_{23} = k\frac{q_1 q_2}{a^2} + k\frac{q_2 q_3}{(a-x)^2} = k\left[\frac{e \cdot 4e}{a^2} + \frac{4e \cdot q}{(a-x)^2}\right] = ke\left[\frac{4e}{a^2} + \frac{4q}{(a-x)^2}\right]$$

$$F_3 = F_{31} + F_{32} = k\frac{q_1 q_3}{x^2} + \left[-k\frac{q_2 q_3}{(a-x)^2}\right] = k\left[\frac{e \cdot q}{x^2} - \frac{4e \cdot q}{(a-x)^2}\right] = keq\left[\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(a-x)^2}\right]$$

となります。

(1) 電荷3が受けるクーロン力 F_3 は



$$F_3 = keq\left[\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(a-x)^2}\right]$$

となります。

(2) $F_3 = 0$ とすると

$$F_3 = keq\left[\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(a-x)^2}\right] = 0$$

$$(a-x)^2 - 4x^2 = 0$$

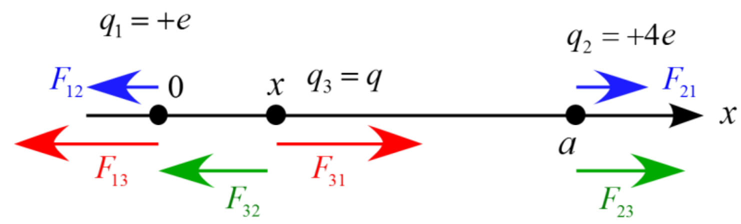
$$a^2 - 2ax - 3x^2 = 0$$

$$(a+x)(a-3x) = 0$$

$$x = \frac{a}{3} \qquad (x > 0)$$

となります。

(3) $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ となるのは、$x = \frac{a}{3}$ を代入すると



$$F_1 = -ke\left[\frac{4e}{a^2} + \frac{q}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}\right] = -ke\left(\frac{4e}{a^2} + \frac{9q}{a^2}\right) = 0$$

$$F_2 = ke\left[\frac{4e}{a^2} + \frac{4q}{\left(a - \frac{a}{3}\right)^2}\right] = 0$$

$$F_3 = keq\left[\frac{1}{x^2} - \frac{4}{\left(a - \frac{a}{3}\right)^2}\right] = 0$$

F_1 に着目すると

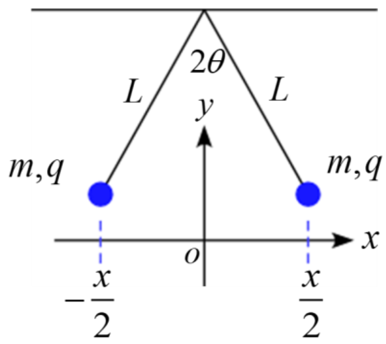
$$4e + 9q = 0$$

$$q = -\frac{4e}{9}$$

となります。

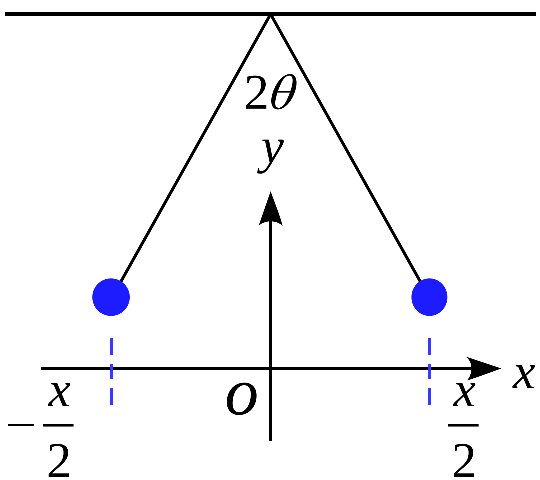
電荷～クーロンの法則～例題

質量 m 、電荷 q をもつ十分に小さな球が、長さ L の糸で吊るされて静止している。
2つの球の間隔 x を求めよ。
但し、角度 θ は十分に小さいとする。

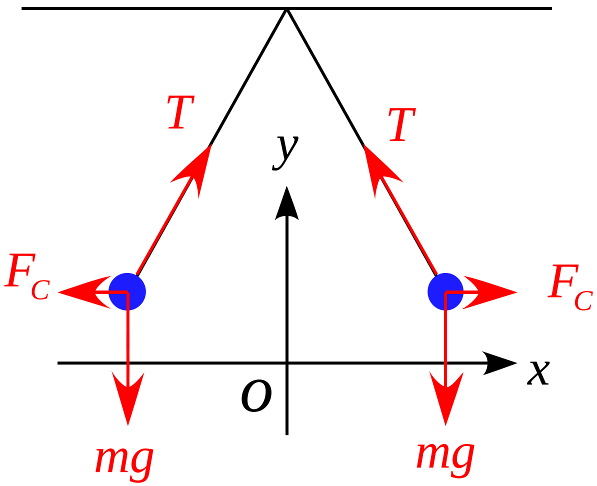


質量 m と設定されているので「重力 mg 」が作用するものと考えられる。

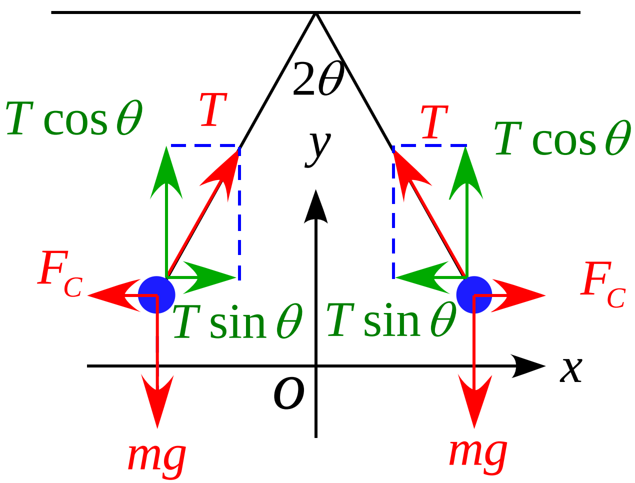
作図をし、軸を設定すると



作用する力の矢印を書き込むと



作用する力は「重力 mg 」「クーロン力 F_C 」「張力 T 」になります。
軸に沿って成分を分解すると



となります。

従って、右側の球について運動方程式は

$$ma_x = F_C - T\sin\theta$$

$$ma_y = T\cos\theta - mg$$

となります。
球は静止しているので $\boldsymbol{a_x = 0, a_y = 0}$ より

$$0 = F_C - T\sin\theta$$

$$0 = T\cos\theta - mg$$

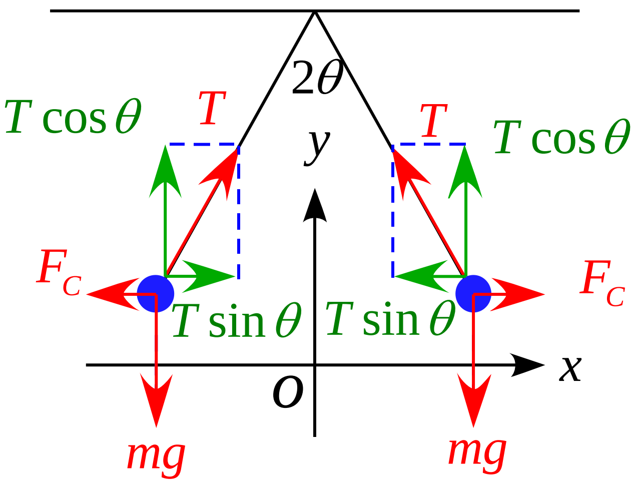
$$T\sin\theta = F_C$$

$$T\cos\theta = mg$$

となります。
2式の比を取って

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \tan\theta = \frac{F_C}{mg}$$

となります。

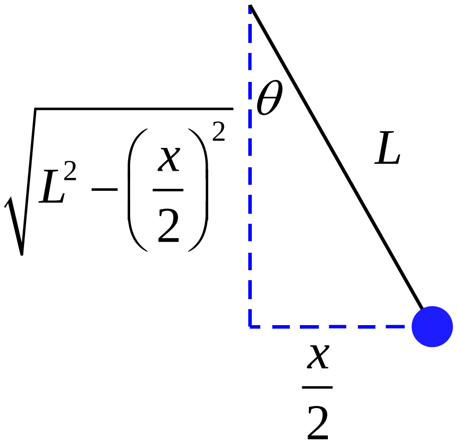


F_C を計算すると

$$\tan\theta = \frac{F_C}{mg} = \frac{k\dfrac{q^2}{x^2}}{mg} = \frac{kq^2}{mg}\frac{1}{x^2}$$

となります。
ここで、**角 θ は十分に小さく**
$\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$ の近似を用いると

$$\tan\theta \approx \sin\theta \approx \frac{\dfrac{x}{2}}{L} = \frac{x}{2L}$$



となります。
従って

$$\tan\theta = \frac{kq^2}{mg}\frac{1}{x^2} \approx \sin\theta = \frac{x}{2L}$$

$$x^3 \approx \frac{2Lkq^2}{mg} \qquad x \approx \left(\frac{2Lkq^2}{mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

となります。