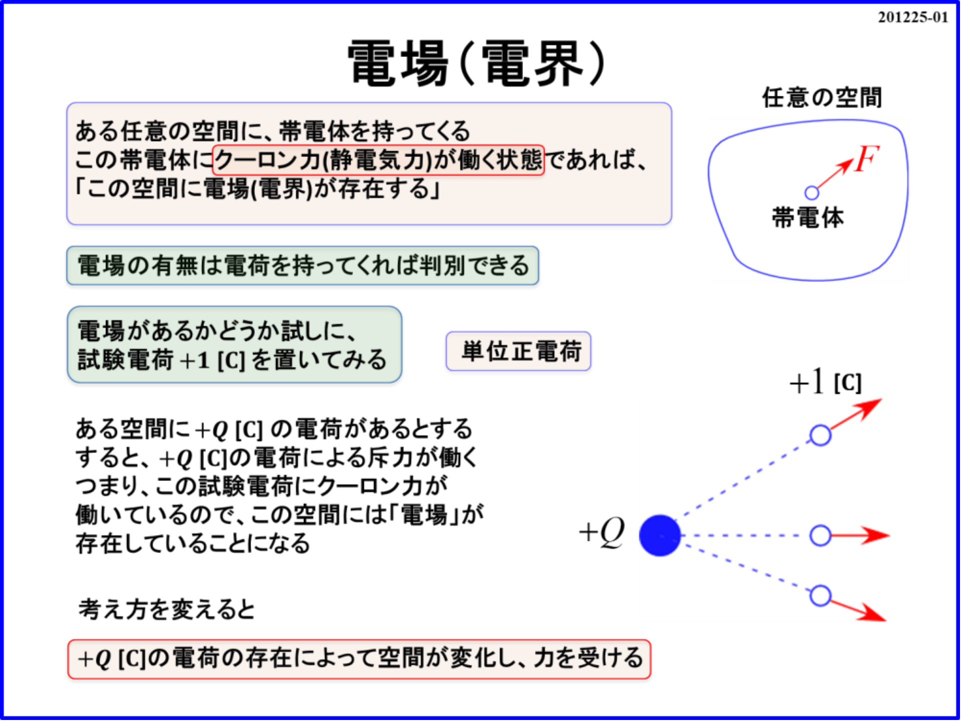


「場」という概念が登場します。「空間自体が変化している状態」であると考える考え方です。

ある空間に帯電体を持って来たとします。
このとき、この帯電体にクーロン力が働く状態であれば、
「この空間に電場が存在する」と考えます。

「電場」と「電界」は「electric field」を翻訳するとき「field」をどう訳すかの違いです。
物理系は「場」を多く用い、工学系は「界」を利用するケースが多いようです。

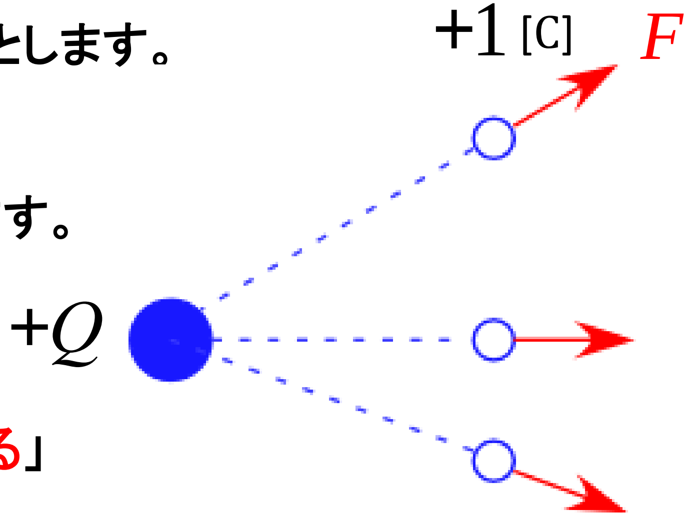
電場は目に見えるものではないので、電場の有無を測るためには電荷を持ってくれば
判別ができます。

重力場の場合は質量 m を持ってくると「重力 mg 」が作用するのと似ています。

電場の有無を調べるために「試験電荷 1 C 」を置いたとします。
この「試験電荷」を「単位正電荷」とします。

ある空間を考えたときに、その空間内に $+Q$ の電荷があるとします。
すると、この電荷によりクーロン力が斥力として作用します。

従って、この空間内には「電場が存在している」ことになります。



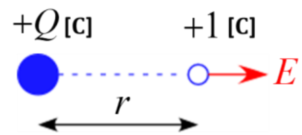
言い方を変えると
「 $+Q$ C の電荷の存在によって空間が変化し力を受けている」
と表すことができます。

この「空間が変化している」という考え方が重要になります。

電場（電界）

試験電荷1個に着目して
クーロン力 F を考えると

$$F = k\frac{Qq}{r^2} = k\frac{Q\cdot 1}{r^2} = \boxed{k\frac{Q}{r^2}}$$



この F は $+1$ [C] 当たりのクーロン力と考えられ、
これが電場 E である。

任意の $+q$ [C] の電荷を持ってくれば

$$\boxed{F = qE}$$

となり、クーロン力と同じになります。

ここで、1個の試験電荷に着目すると、
この試験電荷が受けるクーロン力は

$$F = k\frac{Qq}{r^2} = k\frac{Q\cdot 1}{r^2} = k\frac{Q}{r^2}$$

となります。この力 F は「 $+1$ C 当たりのクーロン力」となりこれを「電場 E 」と定義します。

試験電荷の代わりに任意の電荷 q C を持ってくれば

$$F = qE = k\frac{Qq}{r^2}$$

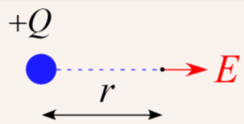
となり、クーロンの法則の式と一致します。

電場（電界）

定義

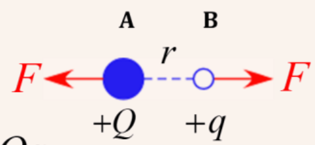
電場 E は +1 [C] に働く力で定義される

点電荷 $+Q$ [C] から r [m] だけ離れた電場 E の大きさは



$$E = k\frac{Q}{r^2} \quad \text{[N/C]}$$

クーロンの法則

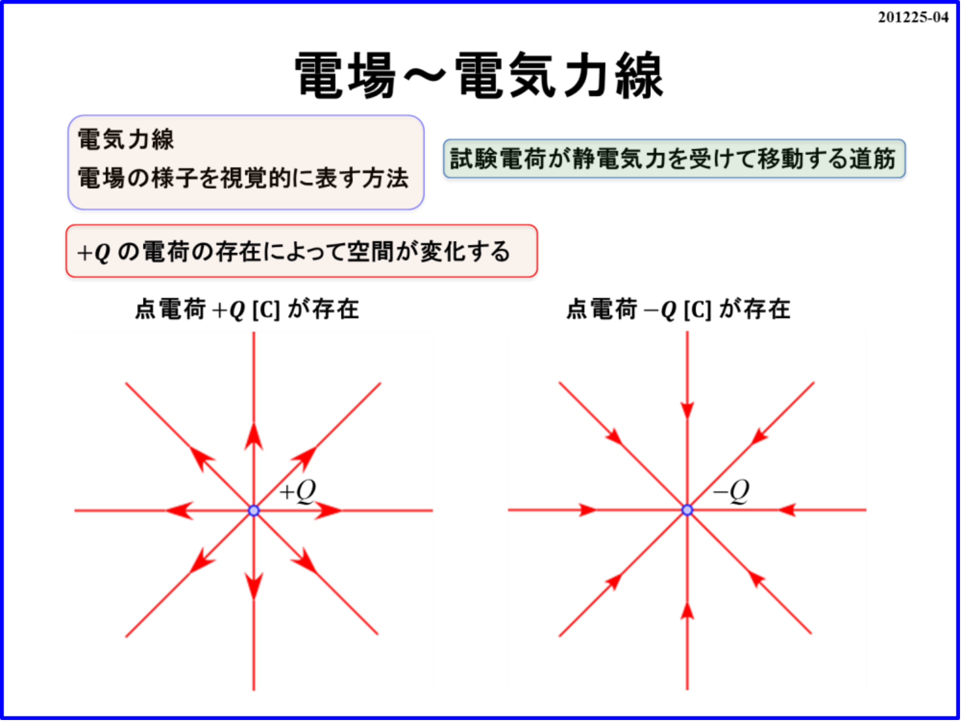


$$F = k\frac{Qq}{r^2} \quad \text{[N]}$$

まとめると、
「電場 E は +1 C 当たりのクーロン力」を指し、

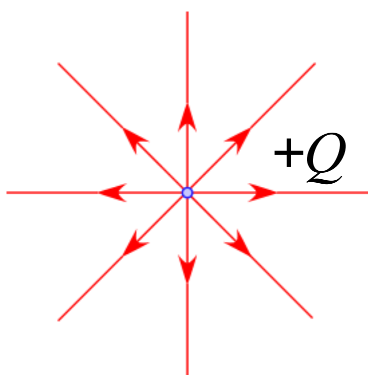
$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

と表します。
単位は 1 C 当たりの力なので「 $^{N}/_{C}$ 」となります。



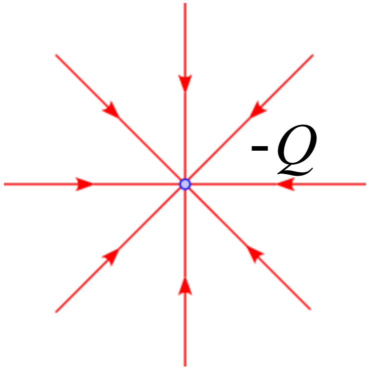
前で話した様に、「電場は目に見えない」ものです。
そこで、この電場を視覚的に表すものが「電気力線」になります。
「電気力線」は「試験電荷がクーロン力を受けて移動する道筋」になります。

ある空間に点電荷 $+Q$ C が存在したとすると

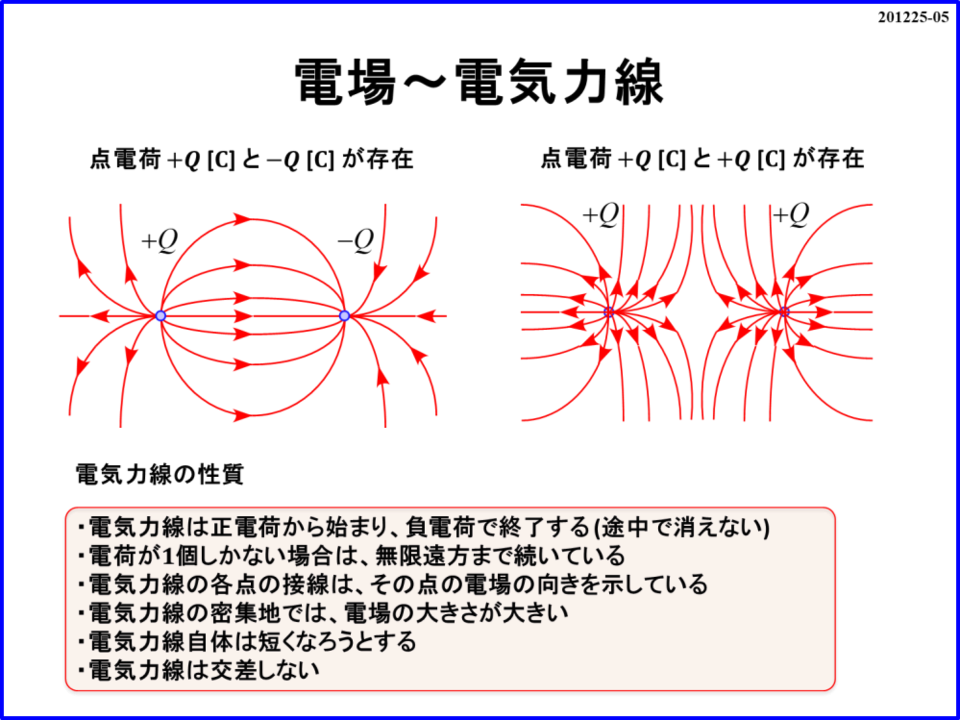


この様に放射状に電気力線が広がります。
「$+Q$」の電荷なので作用するクーロン力は斥力となり、
矢印は外向きになります。

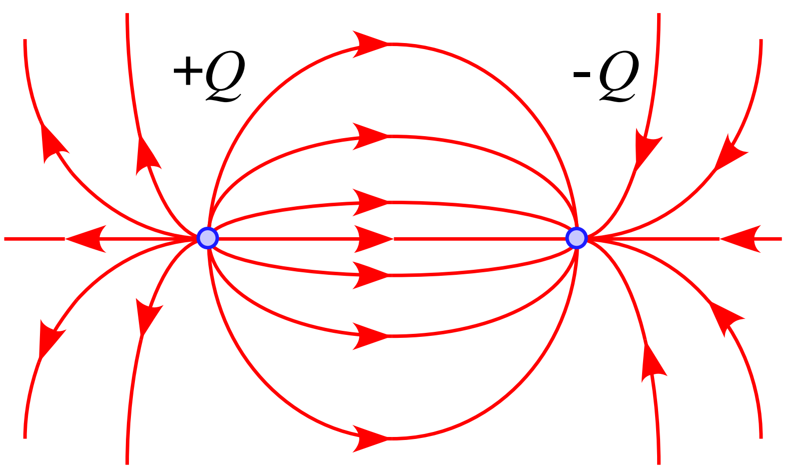
ある空間に点電荷 $-Q$ C が存在したとすると



この様に電気力線が点電荷に吸い込まれるようになります。
「$-Q$」の電荷なので作用するクーロン力は引力となり、
矢印は内向きになります。



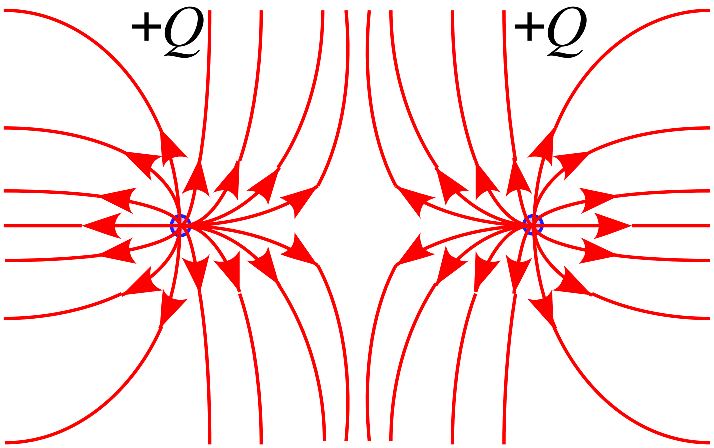
また、ある空間に点電荷 $+Q$ C と $-Q$ C が存在したとすると



電気力線は「$+Q$ の点電荷」から出て「$-Q$ の点電荷」に吸い込まれるようになります。

図のようになります。

また、ある空間に点電荷 $+Q$ C と $+Q$ C が存在したとすると

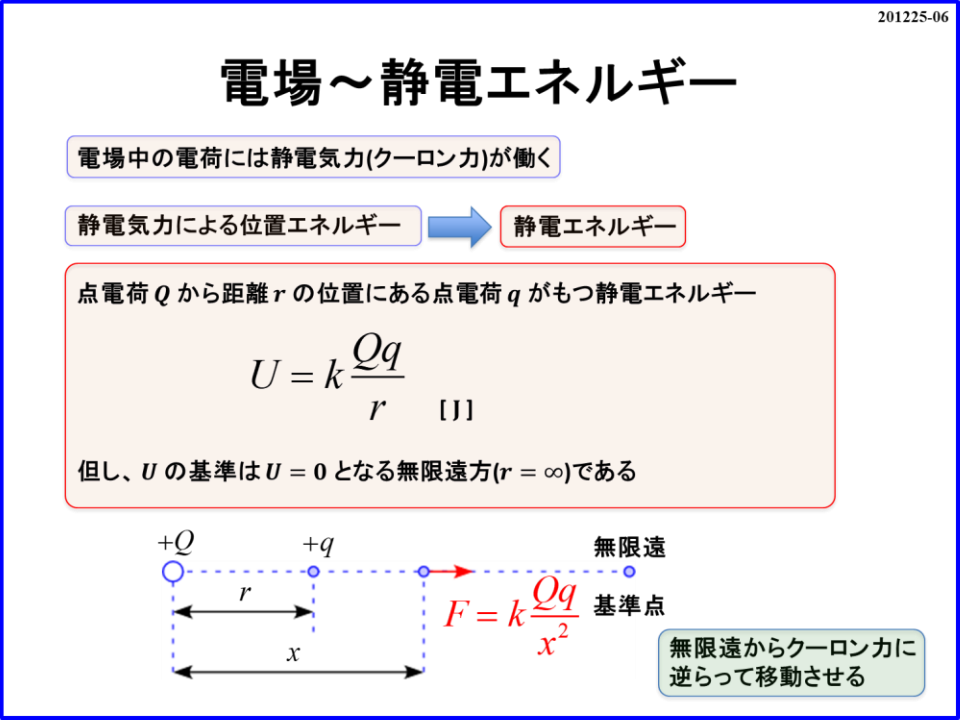


電気力線は2ヶ所の「$+Q$ の点電荷」から出ていきます。お互いに電気力線は交わること無く反発し合うように広がっていきます。

図のようになります。

ここで電気力線の性質について記述しておきます。

・電気力線は正電荷から始まり、負電荷で終了する。途中で消えることはない
・電荷が1個しかない場合、電気力線は無限遠方まで続いている。
　但し、電場の大きさは $\dfrac{1}{r^2}$ 依存なので限りなく小さくなる。
・電気力線の各点の接線はその点での電場の向きを表している。
・電気力線の密集地では電場の大きさは大きい
・電気力線自体は短くなろうとする。(最短ルートを取ろうとする)
・電気力線は交差をすることはない



注)
クーロン力と静電気力は
同じ力を指します。

さて、「クーロン力は力」ですから「仕事とエネルギーの関係」を考えることになります。
この「クーロン力(静電気力)による位置エネルギー」のことを「静電エネルギー」と呼びます。

点電荷 Q から距離 r の位置にある点電荷 q が持つ静電エネルギー U は

$$U = k\frac{Qq}{r}$$

と表されます。
U の基準点は無限遠方 $r = \infty$ としています。
つまり、点電荷 q を無限遠方から点電荷 Q から受けるクーロン力に逆らって移動させたと考えた時のエネルギーとなります。

何故、この式で表されるのかについては後半で解説します。
この式の導出は今日の山場の一つです。
高校物理では天下り式に結果を与えられただけだったと思いますが、
後で実際に運動方程式から導けば納得ができるかと思います。

静電エネルギー～電位

電位
試験電荷 +1 [C] がもつ静電エネルギー → 単位電荷当たりの位置エネルギー

即ち、
静電エネルギー U 、着目している電荷 $+q$ とすると
電位 V は

$$V = \frac{U}{q}$$

となる

+1 [C] の電荷を、静電気力に逆らって
基準点から考えている点まで運ぶのに要する仕事

+1 [C] の電荷に 1 [J] の仕事をして、基準点からある場所まで移動させたとき、
そのある場所の電位を 1 [V] とする。

「静電エネルギー U 」は電荷 q 当たりのエネルギーを表しています。
このエネルギーの1 C 当たりを考えたものが「電位 V 」になります。

即ち、電位 V は

電位は「 V , ϕ 」で
表すことが多い

$$V = \frac{U}{q} = k\frac{Qq}{r}\cdot\frac{1}{q} = k\frac{Q}{r}$$

と表されます。

静電エネルギー～電位

点電荷の場合

$$V=\frac{U}{q}=k\frac{Qq}{r}\cdot\frac{1}{q}=k\frac{Q}{r}$$

となる

これは、無限遠を基準とした、

Q [C] の電荷から r [m] 離れた点での電位 V [V] を表している。

ここで電位を定義すると

「+1 C の電荷に 1 J の仕事をし、基準点からある位置まで移動させたとき
そのある場所の電位を 1 V とする。」

となります。

皆さんにも馴染みがあるであろう「V (ボルト)」と言う単位は「電位」の単位であり、
「エネルギー」を表しているのです。

電位～等電位面

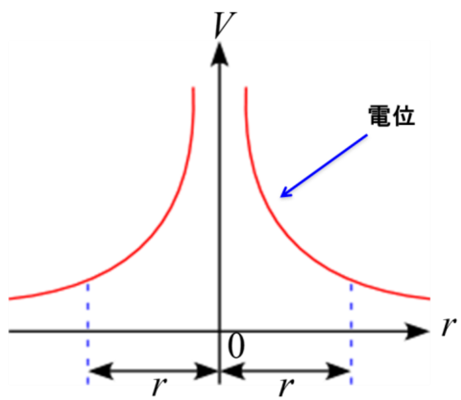
等電位面
電位が等しい平面、曲面

➡ **単位電荷当たりの位置エネルギー**

点電荷 $+Q$ が1つ存在しているとすると
電位 V は

$$V=\frac{U}{q}=k\frac{Q}{r}$$

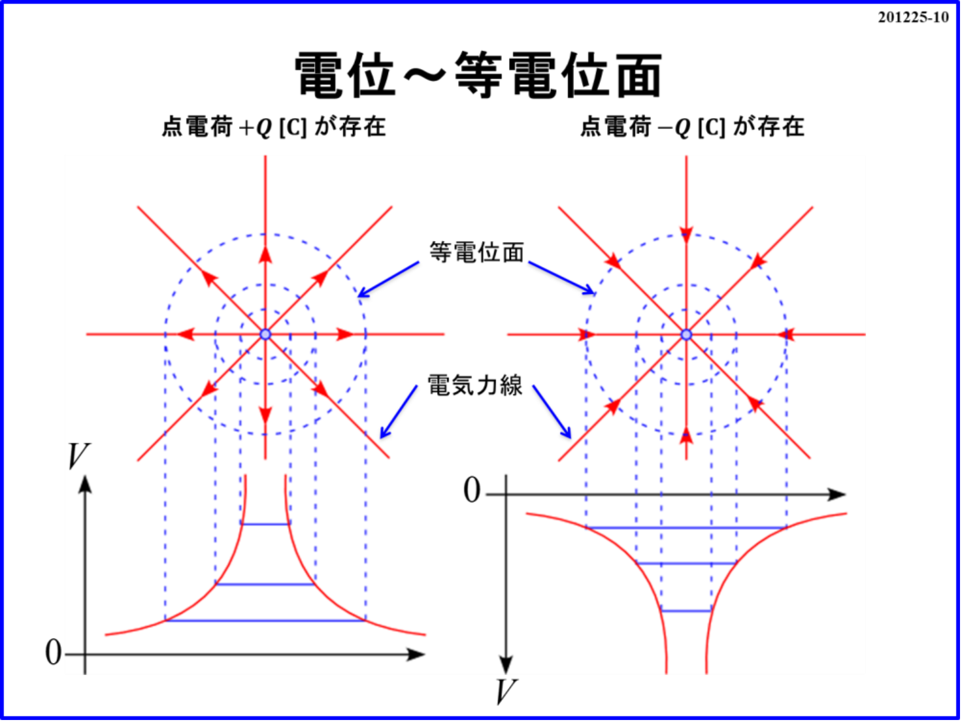
と表せる



電位についてもう少し話をしていきます。
前で表した様に、

$$V=k\frac{Q}{r}$$

と表されます。
従って、電位 V は距離 r に依存した値となります。
距離 r が等しい場所では同じ電位となります。
また、点電荷 Q による電場は3次元空間的に広がるので電位が等しい部分は「面」として表すことができ、「等電位面」と呼びます。



等電位となる場所は同心円状になり、
3次元空間としては「**球面をイメージ**」することになります。
また、電位の大きさは

$$V = k\frac{Q}{r}$$

より、距離 r に反比例したグラフとして表されます。

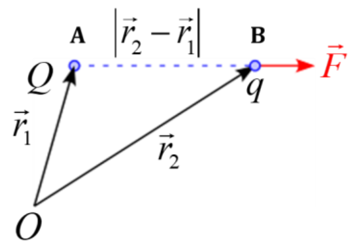
(参考) 201225-11

クーロン力～ベクトル

クーロン力 F のベクトル表示

図のように2つの点電荷があるとする
AB間の距離は

$$\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|$$



であるから、
クーロン力 $\vec{F}$ の向きを表す単位ベクトル $\vec{i}$ は

$$\vec{i}=\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}$$

となるので

$$\boxed{\vec{F}=k\frac{Qq}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}}$$

と表せる

ここではクーロン力についてベクトルを用いて一般的に表現する方法を解説します。
少し難しいので「参考」と考えて下さい。

ベクトルとして表すと、「大きさ・単位ベクトル」の形で表します。

$$\vec{F}=k\underbrace{\frac{Qq}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|^2}}_{\text{クーロン力の大きさ}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}}}_{\text{単位ベクトル}}$$

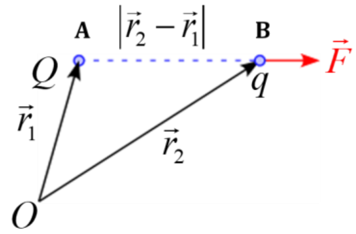
(参考)

電場～ベクトル

電場 $\vec{E}$ は「単位電荷に働くクーロン力」なので
Aの点電荷 Q が、Bの位置につくる電場は

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\frac{Q}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\cdot\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

と表せる



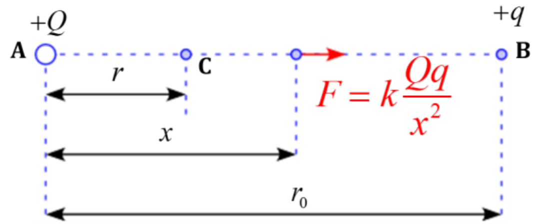
電場 $\vec{E}$ も同様に

ベクトルとして表すと、「大きさ・単位ベクトル」の形で表します。

$$\vec{E} = k\underbrace{\frac{Q}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}}_{\text{電場の大きさ}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}}}_{\text{単位ベクトル}}$$

クーロン力～静電エネルギー

図において、点電荷 q をクーロン力に逆らってBからCまで運ぶのに必要な仕事を考える



Aから距離 x の地点の力は

$$F = k\frac{Qq}{x^2}$$

よって運動方程式は

$$ma = k\frac{Qq}{x^2} - f$$

$$m\frac{dv}{dt} = k\frac{Qq}{x^2} - f$$

両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int\left(k\frac{Qq}{x^2} - f\right)dx$$

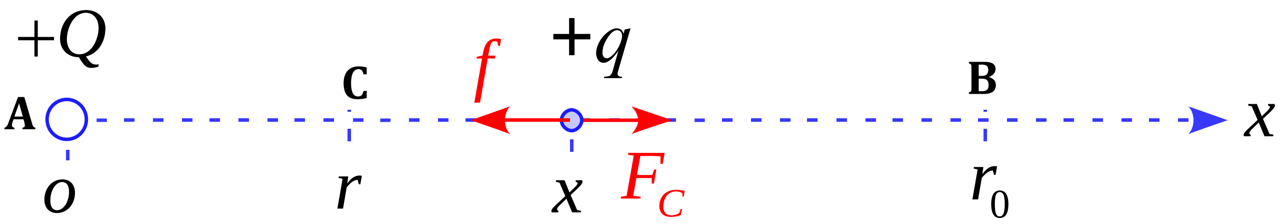
$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int\left(k\frac{Qq}{x^2} - f\right)dx$$

さて、それでは今日の山場である「静電エネルギー U の導出」を進めていきます。

点電荷 Q を固定し、点電荷 q がどれだけのエネルギーを持っているかについて考えます。
点電荷 q が距離 r_0 の位置である点Bから距離 r の位置にある点Cまで移動した時に生じる仕事を考えることによりクーロン力による位置エネルギーを計算します。
さらに、点Bを無限遠方 $r_0 = \infty$ に設定すれば良いことになります。

それでは進めていきましょう。

図に表すと



作用する力は「クーロン力 $\boldsymbol{F_C}$」と「手の力 $\boldsymbol{f}$」になります。
距離 $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{r < x < r_0}$)でのクーロン力 $\boldsymbol{F_C}$ は

$$F_C = k\frac{Qq}{x^2}$$

であるからこの運動の運動方程式は

$$ma = k\frac{Qq}{x^2} - f$$

と記述でき、加速度の定義 $\boldsymbol{a = \dfrac{dv}{dt}}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = k\frac{Qq}{x^2} - f$$

両辺を $\boldsymbol{x}$ で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int\left(k\frac{Qq}{x^2} - f\right)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int\left(k\frac{Qq}{x^2} - f\right)dx$$

$$\int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int\left(k\frac{Qq}{x^2} - f\right)dx$$

となります。

クーロン力～静電エネルギー

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int k\frac{Qq}{x^2}dx + \int(-f)\,dx$$

$t = 0$ で $x = r_0, v = 0$
$t = t'$ で $x = r, v = 0$

準静的過程

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \left[-k\frac{Qq}{x}\right]_{r_0}^{r} - \int_{r_0}^{r} f dx$$

$$0 = -kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \int_{r_0}^{r} f dx$$

$$kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = -\int_{r_0}^{r} f dx$$

よって、

$$\underbrace{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt}_{\text{運動エネルギーの変化}} = \underbrace{\int k\frac{Qq}{x^2}dx}_{\text{クーロン力の仕事}} + \underbrace{\int(-f)\,dx}_{\text{手の仕事}}$$

となります。
ここで、この運動は準静的過程であるとし、
初期条件を設定すると

$t=0$ で $x(0)=r_0$, $v(0)=0$
$t=t'$ で $x(t')=r$, $v(t')=0$
なので

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(0)}^{v(t')}=\int_{r_0}^{r}k\frac{Qq}{x^2}dx+\int_{r_0}^{r}(-f)dx$$

$$0=\left[-k\frac{Qq}{x}\right]_{r_0}^{r}+\int_{r_0}^{r}(-f)dx$$

$$0=\underbrace{-kQq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}_{\text{クーロン力の仕事}}+\underbrace{\int_{r_0}^{r}(-f)dx}_{\text{手の仕事}}$$

$$\underbrace{kQq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}_{\text{クーロン力による位置エネルギー } U}=\underbrace{\int_{r_0}^{r}(-f)dx}_{\text{手の仕事 } W_{\text{手}}}$$

となります。

クーロン力～静電エネルギー

ここで、基準点Bを無限遠とすると

$$kQq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right)=-\int_{r_0}^{r} f dx$$

$$k\frac{Qq}{r}=-\int_{r_0}^{r} f dx$$

$$\boxed{U=W_{\text{手}}=k\frac{Qq}{r}}$$

となる

ここで、基準点Bを無限遠方 $r_0=\infty$ と設定し直すと

$$kQq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right)=\int_{r_0}^{r}(-f)\,dx$$

$$kQq\frac{1}{r}=\int_{r_0}^{r}(-f)\,dx$$

となります。

従って、

$$k\frac{Qq}{r} = \int_{r_0}^{r} (-f)\,dx$$

クーロン力による
位置エネルギー U

手の仕事 $W_{手}$

であるので

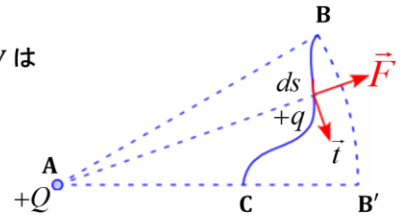
$$U = W_{手} = k\frac{Qq}{r}$$

となります。

(参考)

クーロン力～静電エネルギー

A点の点電荷 Q がつくる電場の中を、B点から点電荷 q を任意の経路を経てC点まで運ぶ仕事を考える



短い区間 ds を移動するときに要する仕事 dW は

$$dW = -\vec{F}\cdot ds\vec{t}$$

よって求める仕事は

$$W = -\int_{\mathrm{BC}} \left(\vec{F}\cdot\vec{t}\right) ds$$
$$= -q\int_{\mathrm{BC}} \left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right) ds$$

ここで、A点を中心とする半径ABの円を考え、ACの延長線上の点をB′とすると経路BB′は移動方向と力の向きが垂直なので仕事は0であるから

$$W = -q\int_{\mathrm{BC}} \left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right) ds = -q\int_{\mathrm{B'C}} \left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right) ds$$

となる

ここではクーロン力による静電エネルギーについてベクトルを用いて一般的に表現する方法を解説します。
結構難しいので「参考」と考えて下さい。流し読みでOKです。

前のスライドでは話を簡単にするために x 軸上の移動としていましたが、任意のルート点Bから点Cの移動を考えます。

微小区間 ds を移動する際の仕事 dW は

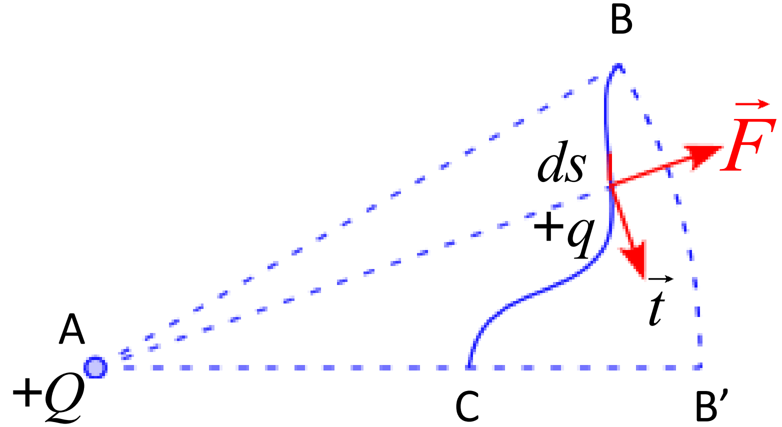
$$dW = -\vec{F}\cdot ds\vec{t}$$

と表されます。ここでの $\vec{t}$ は経路の接線ベクトルの単位ベクトルになります。

経路全体の仕事 W は

$$W=\int_{BC}\left(-\vec{F}\cdot ds\vec{t}\right)=-\int_{BC}\left(\vec{F}\cdot\vec{t}\right)ds=-\int_{BC}\left(q\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds$$

$$=-q\int_{BC}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds$$



となります。
ここで、経路BCの代わりに経路BB’Cを考えます。
経路BB’は円周の一部なので、
常にクーロン力 $\vec{F}$ と接線ベクトル $\vec{t}$ は直交します。
従って、この経路BB’の仕事は内積が0となるので
$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}'} dW=0$ となります。
従って、前述の仕事 W は

$$W=-q\int_{BC}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds=-q\int_{BB'}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds+\left[-q\int_{B'C}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds\right]=-q\int_{B'C}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds$$

と表され、前のスライドで表した簡単なモデルへと帰着できます。

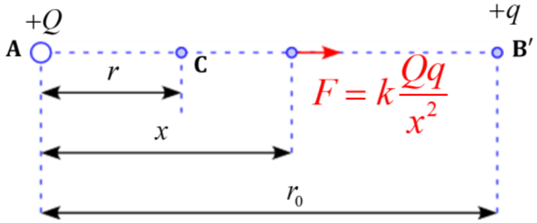
(参考) 201225-17

クーロン力～静電ポテンシャル

これは図の様に簡単に考えられるので
以前の計算と同様に

$$W_{手} = kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

となる



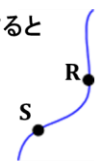
電位の定義から電位(静電ポテンシャル)を ϕ とおくと

$$\phi = \frac{W}{q} = -\int_{\mathrm{BC}} \left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right) ds$$

ある任意の点R、点Sを考え、それぞれの静電ポテンシャルを $\phi_{\mathrm{R}}, \phi_{\mathrm{S}}$ とすると
点Sに対する点Rの静電ポテンシャルは

$$\phi_R - \phi_S = -\int_{\mathrm{RS}} \left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right) ds$$

となる



従って、スライド201225-13と同様の計算を行うことになり、

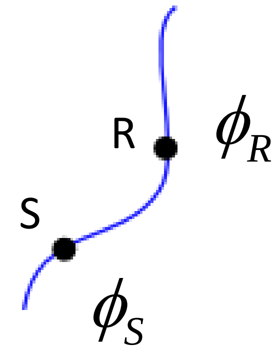
$$W_{手} = kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

と表されます。
電位の定義より電位を ϕ とすると

$$\phi = \frac{U}{q} = \frac{W_{手}}{q} = \frac{-q\int_{BC}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds}{q} = -\int_{BC}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds$$

となります。

経路上のある任意の2点を考え、
それぞれの静電ポテンシャルを ϕ_R, ϕ_S とすると
点Sに対する点Rの静電ポテンシャルは



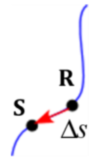
$$\phi_R - \phi_S = -\int_{RS} \left(\vec{E} \cdot \vec{t} \right) ds$$

と表されます。

クーロン力～静電ポテンシャル

ここで、RS間の距離 Δs が微小の場合

$$\phi_R-\phi_S=-\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)\Delta s$$



$$\boxed{\vec{E}\cdot\vec{t}}=-\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\phi_R-\phi_S}{\Delta s}$$

$\overrightarrow{RS}$ 方向の電場の成分

これを3次元空間に拡張すると
電場の x 成分は $\vec{E}\cdot\vec{i}$ となるので

$$\vec{E}(x,y,z)\cdot\vec{i}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$=-\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}$$

区間RSが微小な区間 Δs 場合

$$\phi_R-\phi_S=-\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)\Delta s$$

$$\vec{E}\cdot\vec{t}=-\frac{\phi_R-\phi_S}{\Delta s}$$

と表され、Δs の極限を考えると

$$\vec{E}\cdot\vec{t}=-\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\phi_R-\phi_S}{\Delta s}$$

と表されます。

これを3次元空間に拡張すると
x 成分において単位ベクトルを $\vec{i}$ と記述すると

$$\vec{E}\left(x,y,z\right)\cdot\vec{i}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi\left(x+\Delta x,y,z\right)-\phi\left(x,y,z\right)}{\Delta x}=-\frac{\partial\phi\left(x,y,z\right)}{\partial x}$$

と表されます。
$\frac{\partial}{\partial x}$は偏微分を表しています。

(参考) 201225-19

クーロン力～静電ポテンシャル

同様に、電場の y, z 成分は $\vec{E}\cdot\vec{j}, \vec{E}\cdot\vec{k}$ となるので

$$\vec{E}(x,y,z)\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y} \quad \vec{E}(x,y,z)\cdot\vec{k} = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}$$

よって

$$\vec{E}(x,y,z) = \left(-\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}, -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}, -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

従って、

$$E(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}, -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}, -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(\vec{r}) = \boxed{-\nabla\phi(\vec{r})}$$

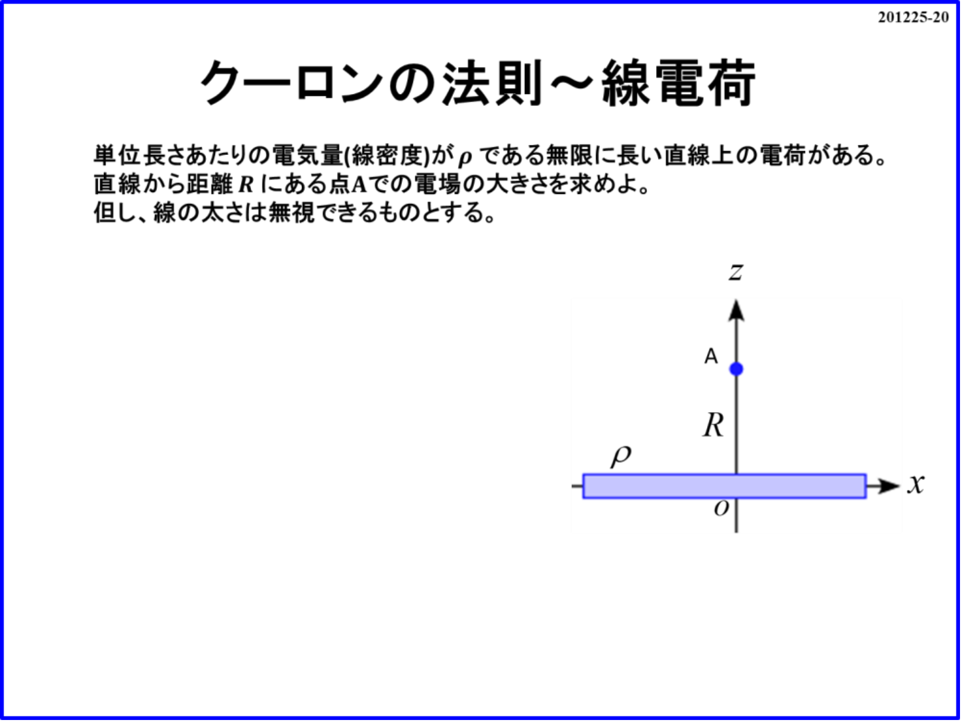
$\nabla\phi$
grad ϕ
ϕ の「勾配」

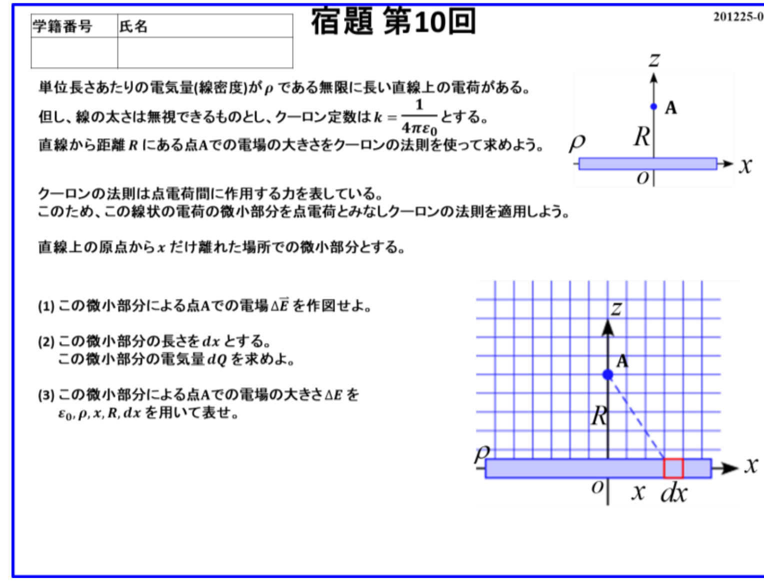
同様に y, z 成分も計算しまとめると

$$\vec{E}(x,y,z) = \left(-\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}, -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}, -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$$E(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}, -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}, -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\phi(\vec{r}) = \nabla\phi(\vec{r})$$

となります。





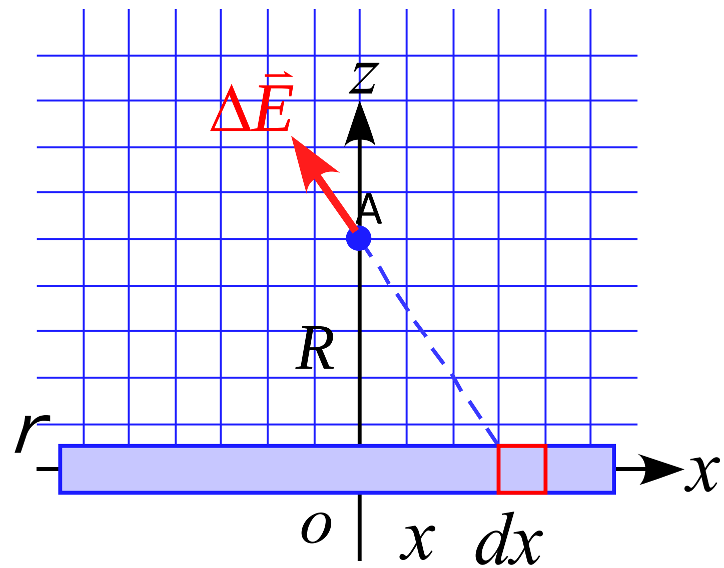
解説は宿題の問題を軸に進めていきます。

まずは作図になります。
微小部分 dx が点Aに作る電場 ΔE は
微小部分と点Aを結んだ直線上に生じます。

この微小部分の電気量 dQ は線密度 ρ がであるから

$$dQ = \rho dx$$

となります。

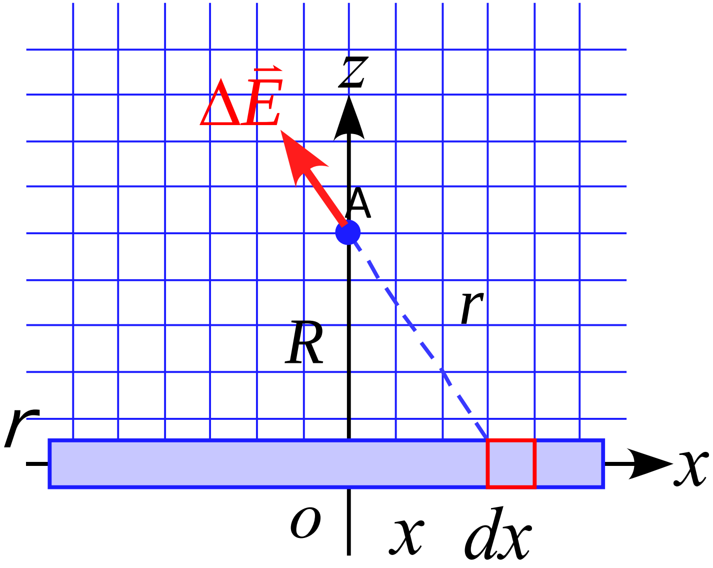


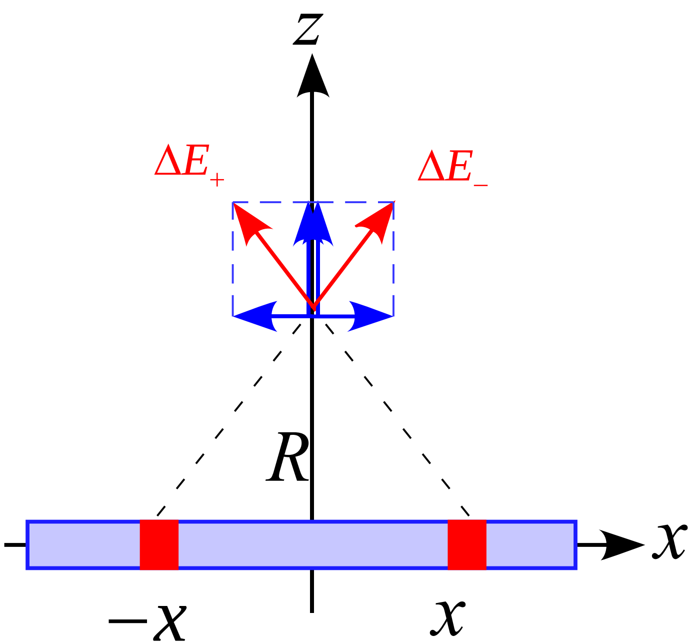
従って、この微小部分による電場の大きさ ΔE は

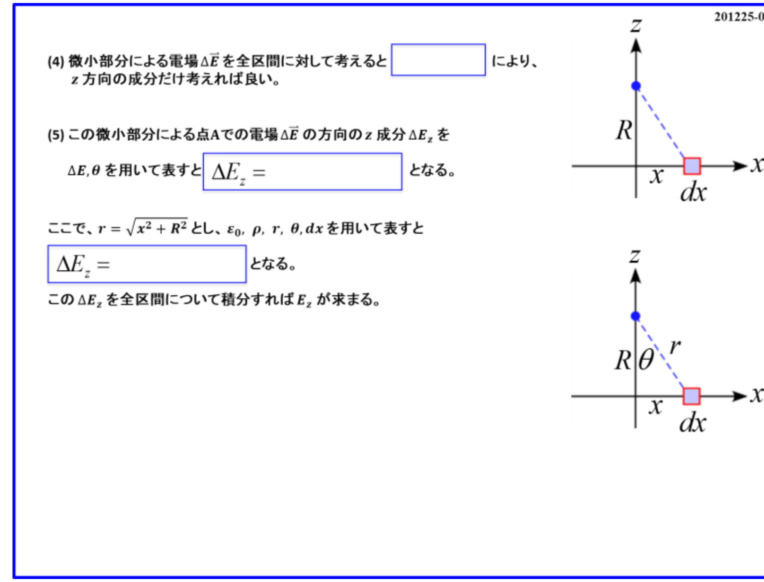
$$\Delta E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{\left(\sqrt{x^2+R^2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{x^2+R^2}$$

となります。







201225-02

(4) 微小部分による電場 $\Delta\vec{E}$ を全区間に対して考えると $\boxed{\quad}$ により、
z 方向の成分だけ考えれば良い。

(5) この微小部分による点Aでの電場 $\Delta\vec{E}$ の方向の z 成分 ΔE_z を
$\Delta E, \theta$ を用いて表すと $\boxed{\Delta E_z =}$ となる。

ここで、$r=\sqrt{x^2+R^2}$ とし、ε_0, ρ, r, θ, dx を用いて表すと
$\boxed{\Delta E_z =}$ となる。
この ΔE_z を全区間について積分すれば E_z が求まる。

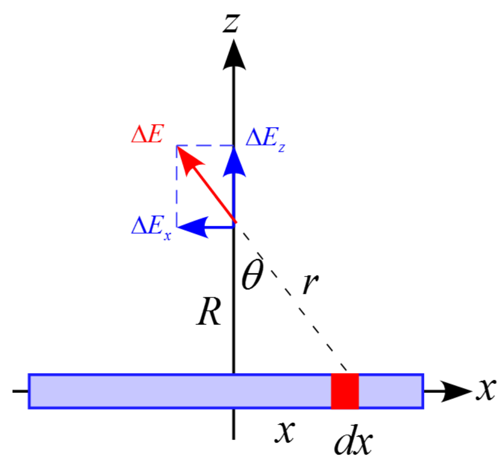
微小部分がある場所は反対側(マイナス側)にも同様に考えることが出来ます。
従って、対称性により ΔE の x 成分は打ち消し合い z 成分のみが残ることになります。

電場 ΔE の z 成分 ΔE_z は

$$\Delta E_z = \Delta E \cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{r^2}\cos\theta$$

となります。



この $\Delta \boldsymbol{E_z}$ を全区間に対して積分を行えば $\boldsymbol{E_z}$ が求まります。

$$\Delta E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{r^2}\cos\theta$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho {\color{red}dx}}{r^2}\cos\theta$$

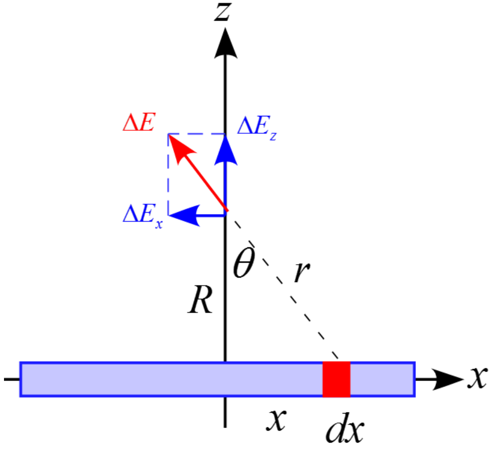
$\Delta \boldsymbol{E_z}$ は変数が $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}$ と2つあるので、これを $\boldsymbol{\theta}$ のみの変数に式変形します。
そのための下準備をします。

$$r = \frac{R}{\cos\theta} \qquad x = R\tan\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(R\tan\theta\right) = R\frac{1}{\cos^2\theta}$$

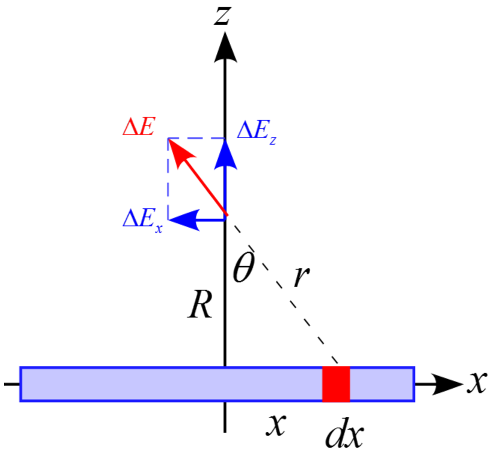
積分区間は

$$\boldsymbol{x} : -\infty \ \rightarrow \ +\infty$$
$$\boldsymbol{\theta} : -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} \ \rightarrow \ +\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$$



となります。

$\Delta \boldsymbol{E_z}$ について整理すると



$$\Delta E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho \dfrac{R}{\cos^2\theta}d\theta}{\left(\dfrac{R}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho}{R}\cos\theta d\theta$$

従って $\boldsymbol{E_z}$ は

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

となります。

x の微分について

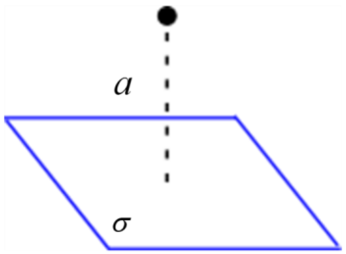
$$x = R\tan\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left(R\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \\
&= R\left[\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)\frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)^{-1}\right] \\
&= R\left[\cos\theta\frac{1}{\cos\theta} + \sin\theta\cdot(-1)\cdot(\cos\theta)^{-2}(-\sin\theta)\right] \\
&= R\left[1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right] \\
&= R\left[\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right] \\
&= R\frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

となります。

クーロンの法則～面電荷

無限に広い平面がある。
この平面上に面密度 σ で一様に電荷が分布しているとする。
この平面から距離 a だけ離れた点での電場の大きさを求めよ。
但し、真空誘電率は ε_0 とする。

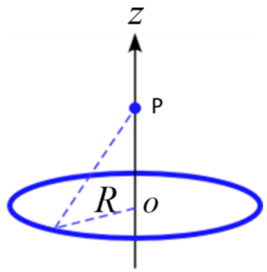


レポート課題の問題なのでここでは解答しません。

チャレンジしてみて下さい。

クーロンの法則～リング状電荷

図のような z 軸を中心軸にもつ半径 R のリング状の電荷がある。
単位長さあたりの電荷量(線密度)が ρ である場合、
z 軸上の点Pでの電場の大きさを求めよ。

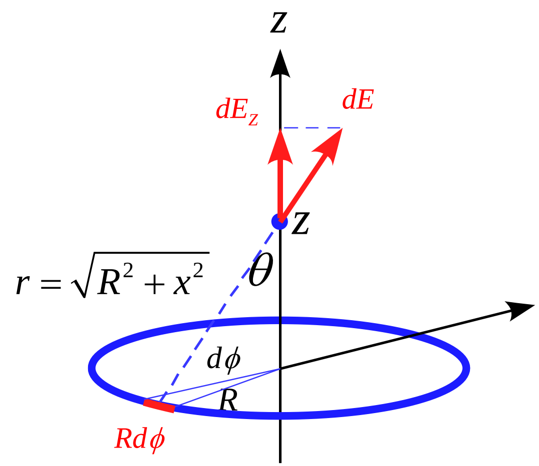


このモデルも微小部分が作る電場を考え、全区間積分という流れになります。

微小部分の電荷 dQ は

$$dQ = \rho R d\phi$$

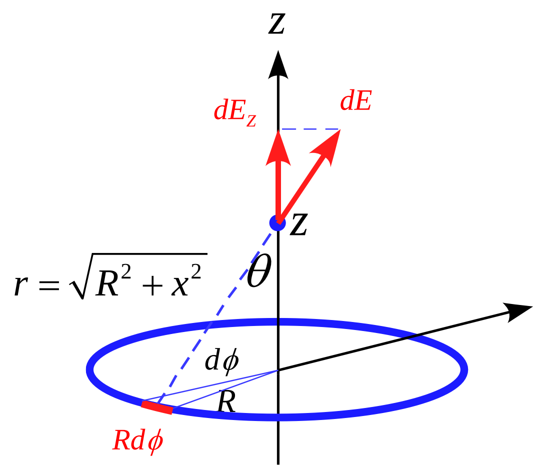
となります。
よって、微小部分が作る電場 dE は



$$dE = k\frac{dQ}{r^2} = k\frac{\rho R d\phi}{r^2}$$

となります。

対称性により z 成分だけ計算すればよく、z 成分の電場 dE_z は



$$dE_z = k\frac{\rho R d\phi}{r^2}\cos\theta$$

と表されます。
ここで

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$

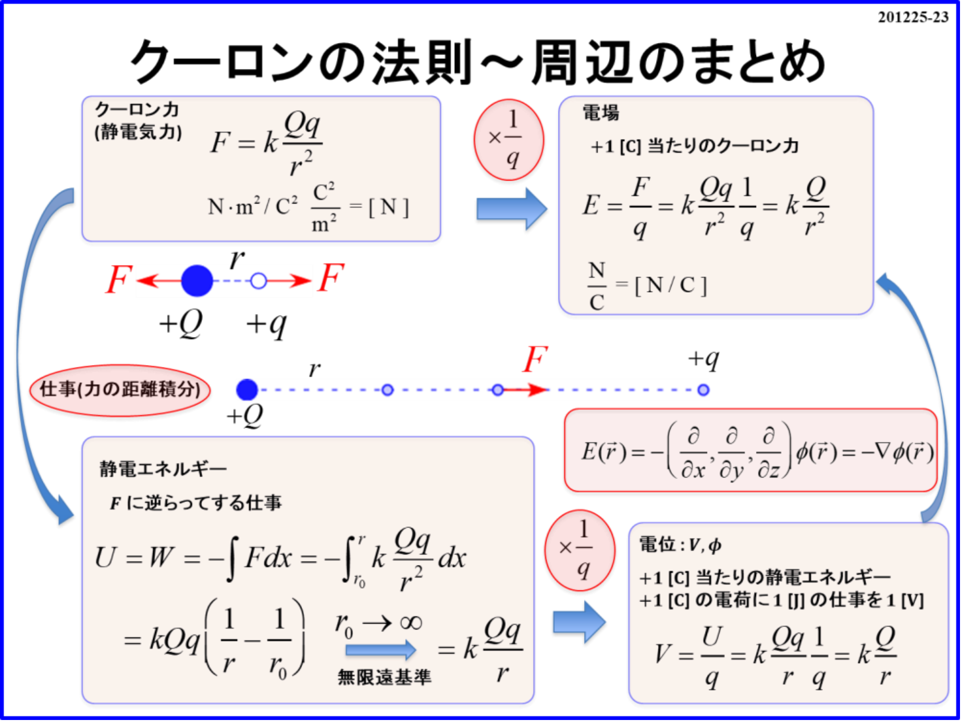
であるから電場 dE_z は

$$dE_z = k\frac{\rho R d\phi}{r^2}\frac{z}{r} = k\frac{\rho R z}{r^3}d\phi$$

となります。
従って、全電場 E_z は

$$E_z = k\frac{\rho R z}{r^3}\int_0^{2\pi} d\phi = k\frac{\rho R z}{r^3}\cdot 2\pi = \frac{2\pi k\rho R z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

となります。



今日の内容をまとめたスライドになります。
クーロン力をスタート地点としてそれぞれがどの様な関係になっているかを理解しましょう。

それぞれの関係を理解すれば、覚える式はクーロン力の式だけでOKなはずです。