

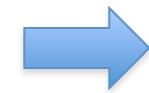
# 2015講義ノート 電磁気学

# 電磁気学

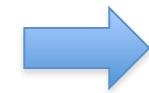
電磁気学

電気及び磁気に関する物理現象

利用



法則



電気モーター  
ラジオ  
テレビ  
コンピューター  
電子機器  
など

電磁気学の歴史

時代	誰が	内容
B.C. 2000頃	中国の文献	磁気の存在の記述あり
B.C 700頃	古代ギリシャ人	電気的、磁気的現象の観察 (琥珀の帯電現象)
1600年	ウィリアム・ギルバート	帯電現象が一般的な現象と発見
1785年	シャルル・クーロン	電気力が逆2乗法則に従うことを発見
19世紀初頭		電気と磁気が互いに関係ある現象を発見
1820年	ハンス・エルステッド	電流の流れる回路付近にコンパスをおくと、磁針の向きが変ることを発見
1831年	マイケル・ファラデー ジョセフ・ヘンリー	磁石の近辺で電線を運動させると、電線に電流が発生することを発見
1873年	ジェームス・クラーク・マクスウェル	電磁気学の法則を完成 (Maxwellの方程式)
1888年頃	ハインリッヒ・ヘルツ	電磁波を発生させ、真空中でも電磁波が伝播することを立証

# Maxwellの方程式

積分形

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \left( \vec{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

微分形

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

電荷の保存則

$$\int_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \vec{i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

# 静電現象～電荷

電荷：静電現象の原因

静電気

物体の帯電状態(電気を帯びている状態)には強弱がある



電気の量

物理では「力」が重要

電気の間では

斥力(反発力) + (正)と+ (正) - (負)と- (負)

引力 + (正)と- (負)

この電気の量を  
「電荷」または「電気量」

帯電体A



帯電体B  
 $+q$    $F$

電気量が同じ

+



帯電体C  
 $+q$    $F$

帯電体D



$+3q$    $3F$  電気量が3倍

# 電荷～クーロンの法則

電荷の定義を考える

右図の様な2つの電荷があるとき

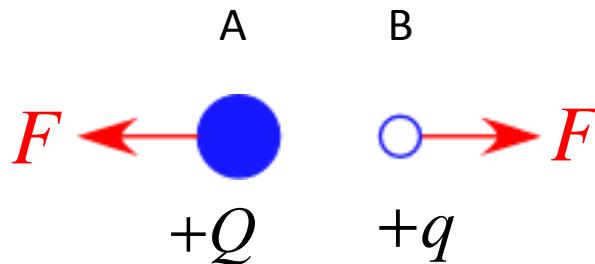
A,Bはそれぞれ斥力  $F$  を受ける  
比例定数を  $\alpha$  とおくと

$$F = \alpha \cdot Qq$$

と表すことができる

この比例定数  $\alpha$  を見出した人

「ねじればかり」を用いて、  
この比例定数  $\alpha$  がAB間の距離  $r$  の  
2乗に反比例することを見出した



$F$  は  $Q$  にも  $q$  にも比例する

フランスの物理学者

Charles - Augustin de Coulomb  
(シャルル - オーギュスタン・ド・クーロン)

1777年、細い絹糸のねじれのバランスを利用して、1/100,000 グラムの微少な力の変化を測定できるねじれ秤(はかり)を発明した。

このはかりを利用して、帯電した小球二個の間に働く引力や反撥力を測定した。

# 電荷～クーロンの法則

従って

$$\alpha = k \frac{1}{r^2}$$

と表すことができる

電荷が受ける力の大きさは

$$F = k \frac{Qq}{r^2}$$

となる

クーロン力の大きさを重力と比較すると

重力の場合



$$m = 1 \text{ [kg]}$$

$$g \approx 10 \text{ [m/s}^2]$$

$$mg$$

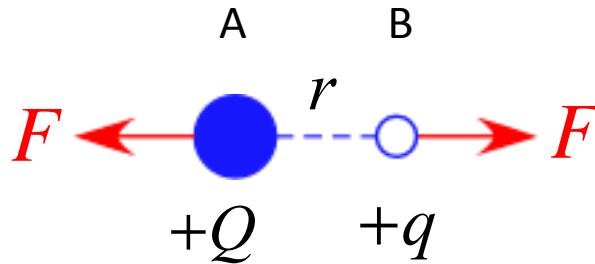
$$F = mg = 10 \text{ [N]}$$

単位

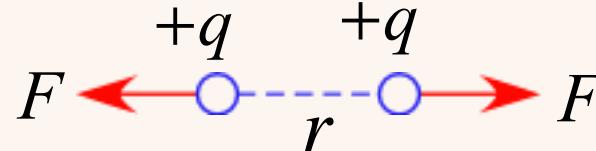
電気量 : [C]

クーロン力 : [N]

比例定数  $k$  : N·m<sup>2</sup> / C<sup>2</sup>  $k \approx 9.0 \times 10^9$  [N·m<sup>2</sup> / C<sup>2</sup>]



クーロン力の場合



$$q = +1 \text{ [C]}$$

$$r = 1 \text{ [m]}$$

$$F = k \frac{q \cdot q}{r^2} = 9.0 \times 10^9 \text{ [N]}$$

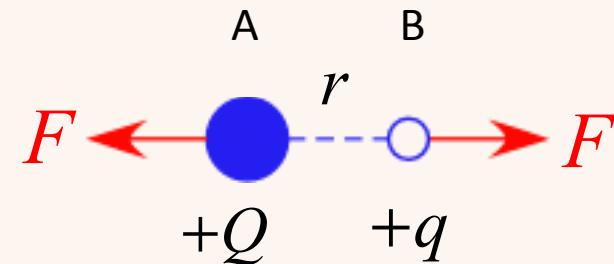
# クーロンの法則

## クーロンの法則

帯電体A,B の体積が無視できるほど  
小さく「点電荷」とみなせるとき  
2つの電荷間に働く力は

$$F = k \frac{Qq}{r^2}$$

と表せ、この力を「クーロン力」と呼ぶ



同符号の場合:斥力(反発力)

異符号の場合:引力

# クーロンの法則～例題(原子)

陽子と電子が  $1 \times 10^{-8}$  [m] 離れた位置にある。

このときの電子と陽子が引きあう力の大きさを求めよ。

但し、電子の電荷を  $1.6 \times 10^{-19}$  [C]、クーロン定数を  $9.0 \times 10^9$  [N·m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>] とする。

ヘリウムの原子核は2個の陽子と2個の中性子で構成されていて、

大きさは約  $2 \times 10^{-15}$  [m] である。

ヘリウムの原子核内の陽子に作用しているクーロン力を求めよ。

但し、電子の電荷を  $1.6 \times 10^{-19}$  [C]、クーロン定数を  $9.0 \times 10^9$  [N·m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>] とする。



# クーロンの法則～例題

## クーロンの法則～例題

図のように、正の電気量  $+q$  をもつ2つの

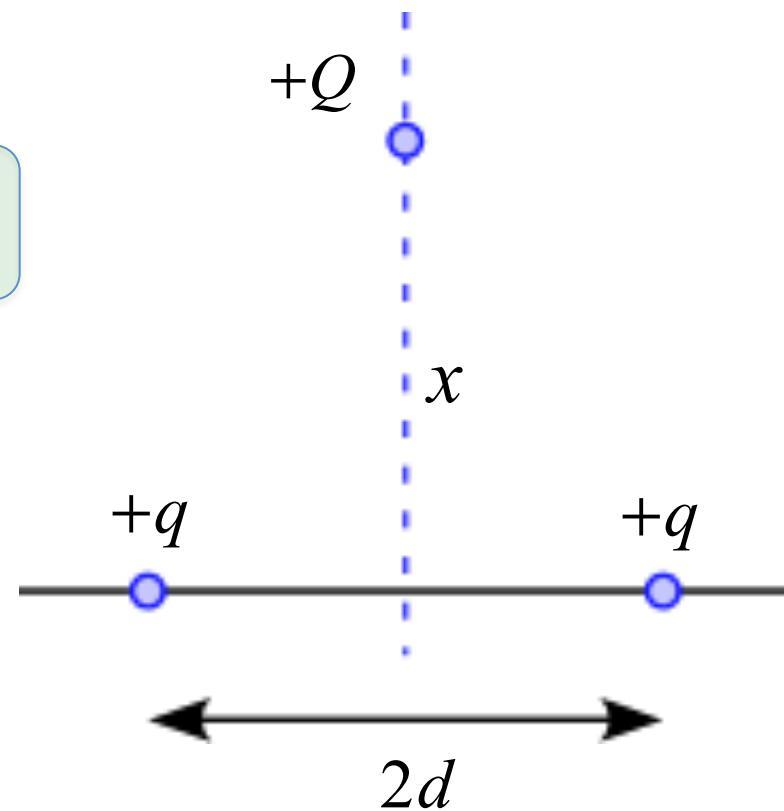
点電荷を距離  $2d$  離して固定する

この2つの点電荷を結ぶ線分の垂直二等分

線上に  $+Q$  の点電荷を置くとき、この点電荷  
が受ける力が最も大きくなる場所  $x$  を考えよ

この問題を考えるにあたって、以下の設問に  
従って検討してみよう

1. 点電荷  $+Q$  が2個の点電荷から受ける力  
を図に書き込め

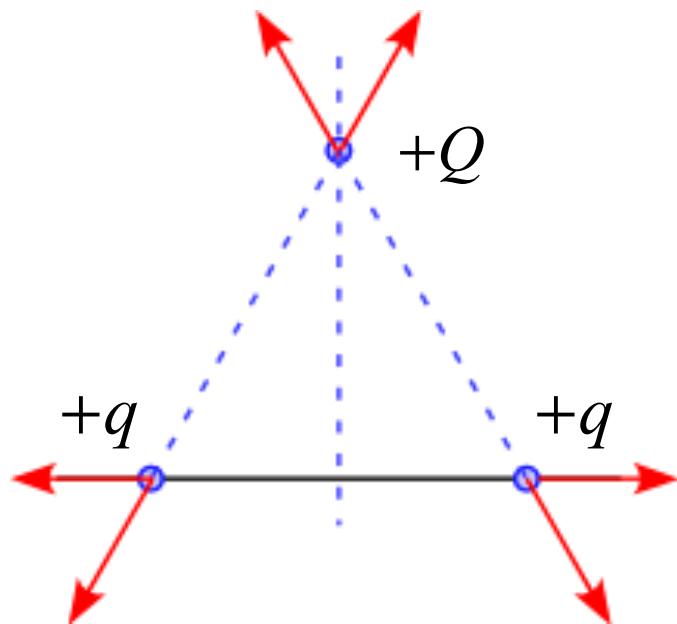
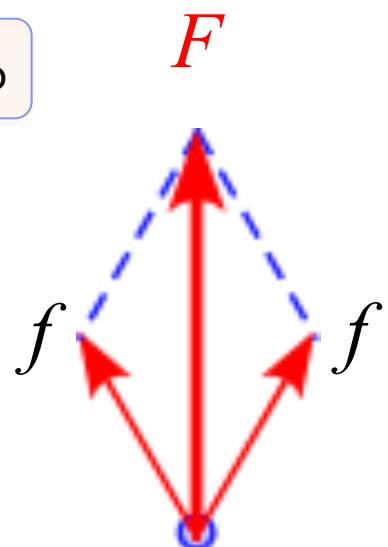


全て正の電気量を持っているので斥力

この3つの点電荷において、それぞれから  
うけるクーロン力は図のようになっている

従って、点電荷  $+Q$  が受ける力  $F$  は

クーロン力  $f$  の合成となる

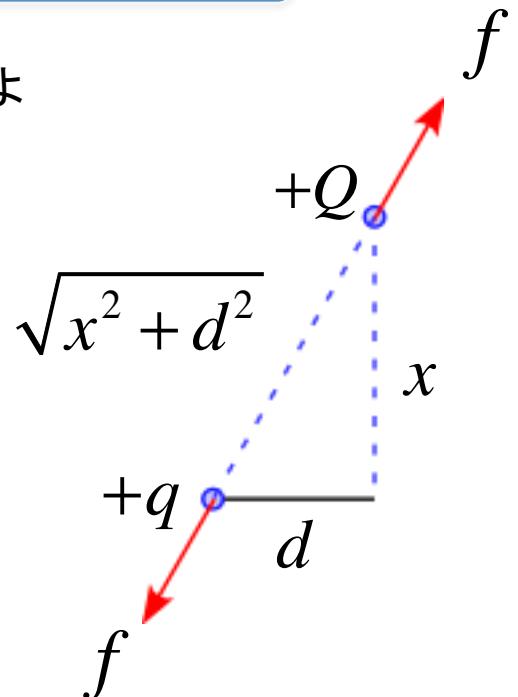


点電荷  $+Q$  が受ける力  $F$  を求めて、その最大値を探ればよい

2. この2つの点電荷のうち1つから受ける力  $f$  を求めよ

$$f = k \frac{Qq}{r^2} = k \frac{Qq}{(\sqrt{x^2 + d^2})^2}$$

$$= k \frac{Qq}{x^2 + d^2}$$



3. この2つの点電荷から受ける力  $F$  を求めよ

求める力  $F$  は

$$F = 2F_1 = 2f \cos \theta$$

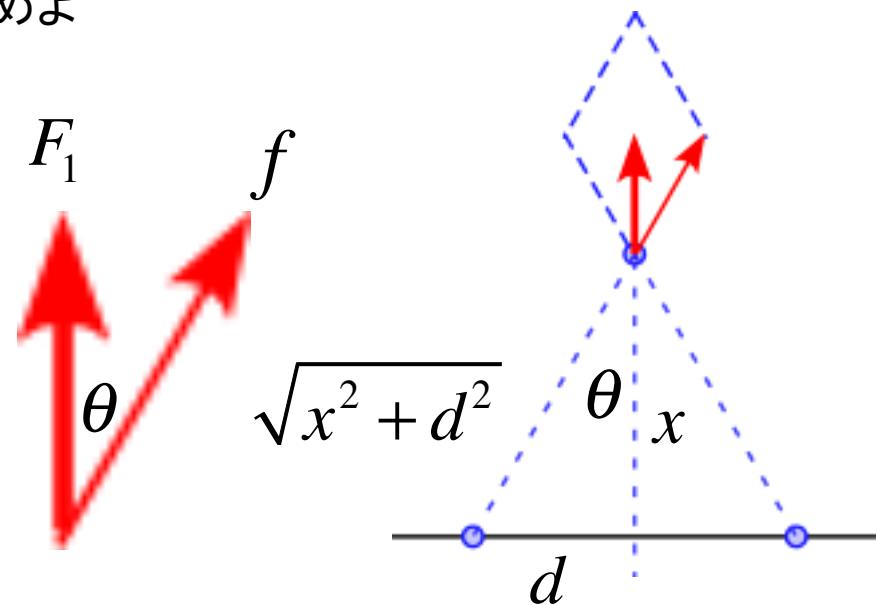
ここで、

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

従って、

$$F = 2f \cos \theta = 2k \frac{Qq}{x^2 + d^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$= \frac{2kQqx}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$



4. この力が最も大きくなる場所  $x$  はどこか求めよ。

$F$  が最大となるのは

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

となるところであるから

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{2kQqx}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$= 2kQq \left\{ (x^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left( -\frac{3}{2} \right) \cdot (x^2 + d^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \right\}$$

$$= 2kQq \left\{ \left( x^2 + d^2 \right)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2 \cdot \left( x^2 + d^2 \right)^{-\frac{5}{2}} \right\}$$

$$= \frac{2kQq}{\left( x^2 + d^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \left\{ x^2 + d^2 - 3x^2 \right\}$$

$$= \frac{2kQq}{\left( x^2 + d^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \left( d^2 - 2x^2 \right)$$

従って、最大値となる場所  $x$  は

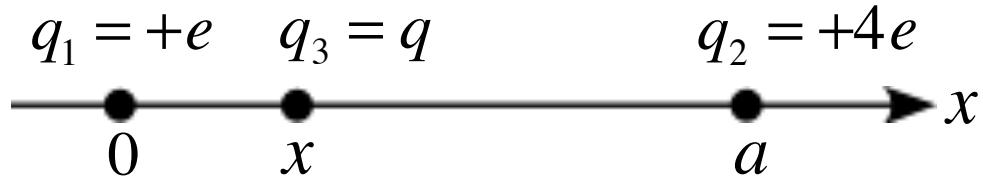
$$x = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

# 電荷～クーロンの法則～例題

2つの電荷が  $x$  軸上に置かれている。

電荷1:  $x = 0, q_1 = +e$

電荷2:  $x = a, q_2 = +4e$



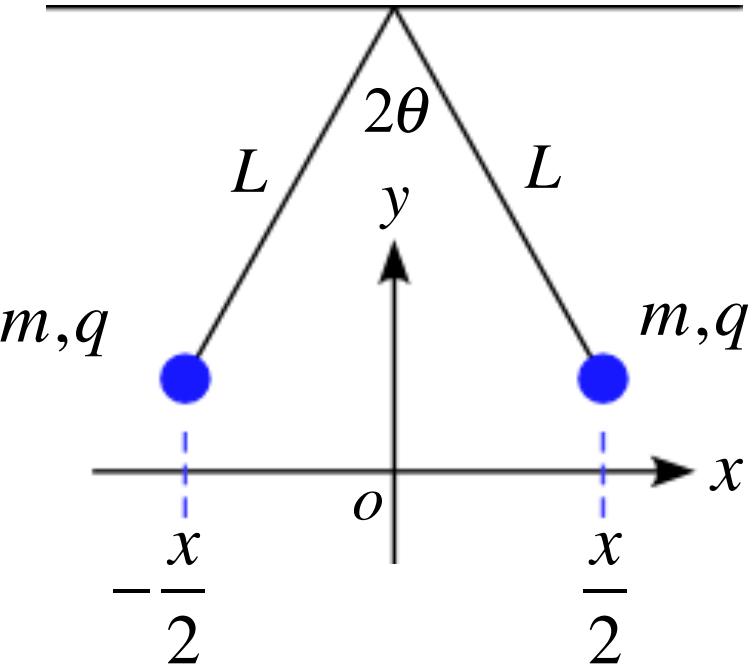
- (1) 電荷3 ( $q_3 = q$ )を  $x$  軸上  $0 < x < a$  に置いたとき、電荷3が受ける力を求めよ。
- (2) 電荷3の電荷1と電荷2から受ける力がゼロになる場所を求めよ。
- (3) 3つの電荷の受ける力をゼロにするための電荷3の電気量を求めよ。

# 電荷～クーロンの法則～例題

質量  $m$ 、電荷  $q$  をもつ十分に小さな球が、長さ  $L$  の糸で吊るされて静止している。

2つの球の間隔  $x$  はいくらか求めよ。

但し、角度  $\theta$  は十分に小さいとする。



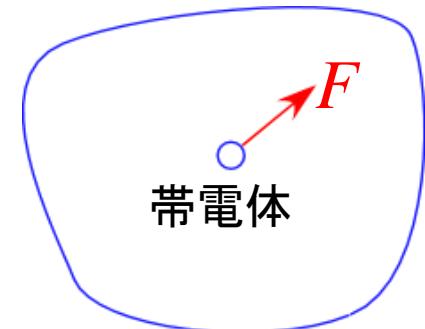


# 電場(電界)

ある任意の空間に、帯電体を持ってくる

この帯電体にクーロン力(静電気力)が働く状態であれば、  
「この空間に電場(電界)が存在する」

任意の空間



電場の有無は電荷を持ってくれば判別できる

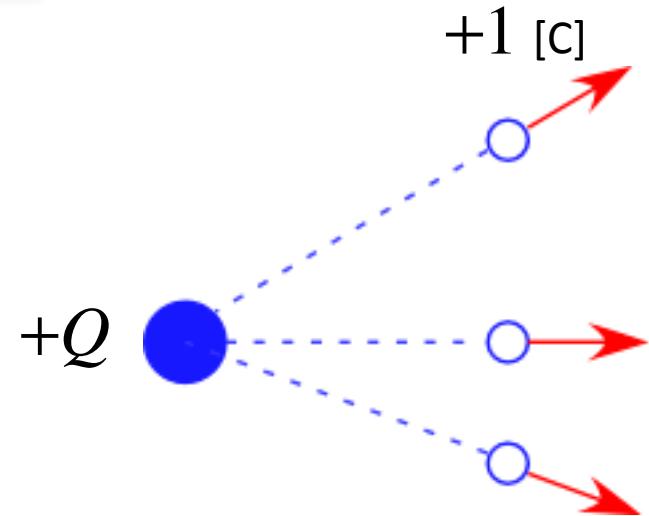
電場があるかどうか試しに、  
試験電荷  $+1$  [C] を置いてみる

単位正電荷

ある空間に  $+Q$  [C] 電荷があるとする  
すると、 $+Q$  [C] の電荷による斥力が働く  
つまり、この試験電荷にクーロン力が  
働いているのでこの空間には「電場」が  
存在していることになる

考え方を変えると

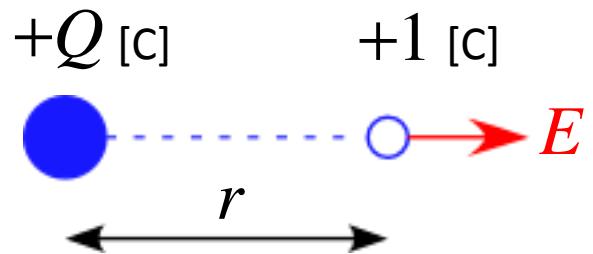
$+Q$  [C] の電荷の存在によって空間が変化し力を受ける



# 電場(電界)

試験電荷1個に着目して  
クーロン力を考えると

$$F = k \frac{Qq}{r^2} = k \frac{Q \cdot 1}{r^2} = k \frac{Q}{r^2}$$



この  $F$  は  $+1$  [C] 当たりのクーロン力と考えられ、

これが電場  $E$  である

任意の  $+q$  [C] 電荷を持ってくれば

$$F = qE$$

となり、クーロン力と同じになります。

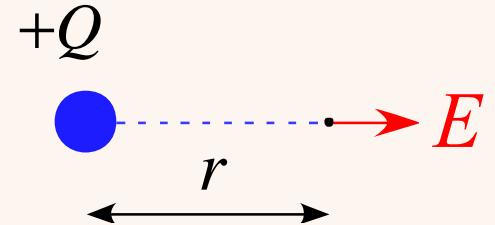
# 電場(電界)

## 定義

電場は  $+1 \text{ [C]}$  に働く力で定義される

点電荷  $+Q \text{ [C]}$  から  $r \text{ [m]}$  だけ離れた電場  $E$  の大きさは

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad [\text{N/C}]$$



## クーロンの法則

A diagram showing two charges, A and B. Charge A is a large blue circle labeled  $+Q$ . Charge B is a smaller blue circle with a hole in the center, labeled  $+q$ . A horizontal dashed line extends from the right side of charge A. Two red arrows labeled  $F$  point away from charge A along this line, one to the left and one to the right. The distance between the charges is indicated by a double-headed arrow labeled  $r$  between them.

$$F = k \frac{Qq}{r^2} \quad [\text{N}]$$



# 電場～電気力線

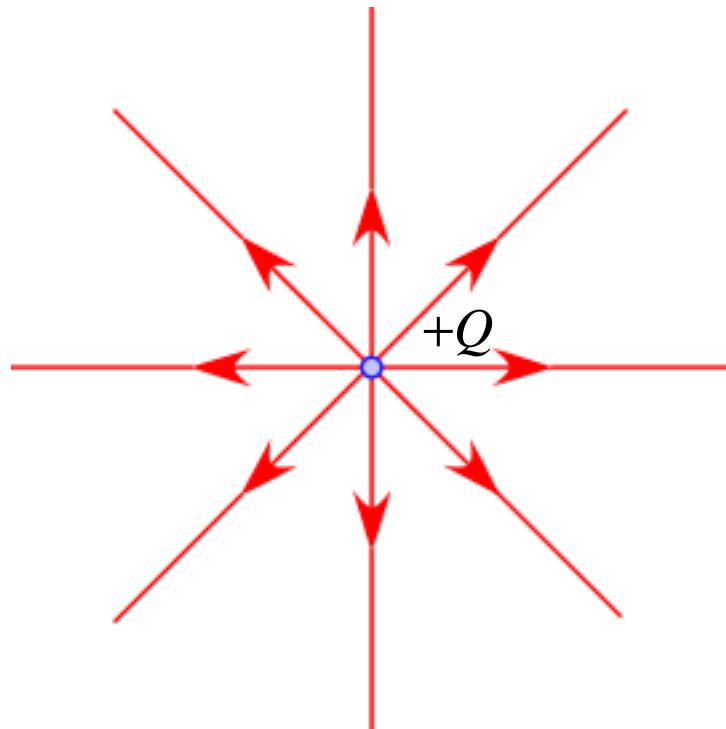
電気力線

電場の様子を視覚的に表す方法

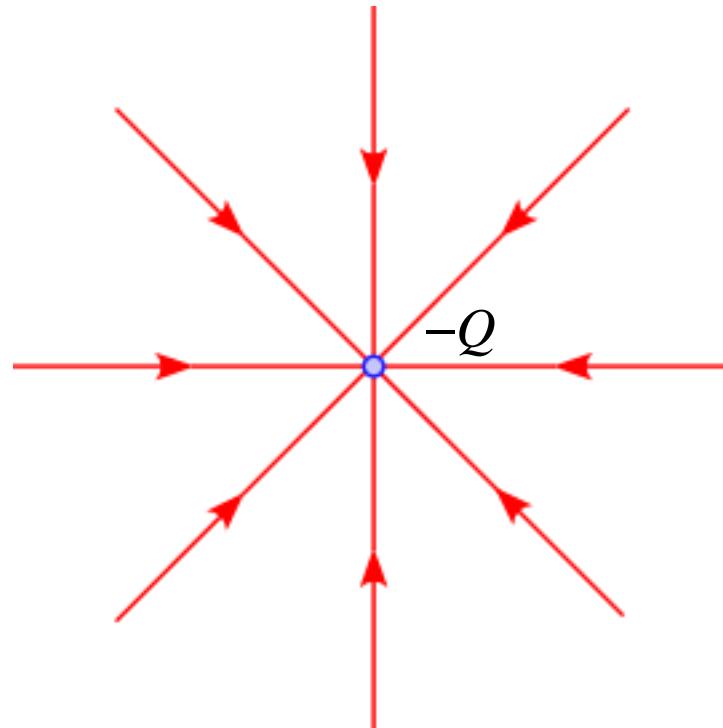
試験電荷が静電気力を受けて移動する道筋

$+Q$  の電荷の存在によって空間が変化する

点電荷  $+Q$  [C] が存在

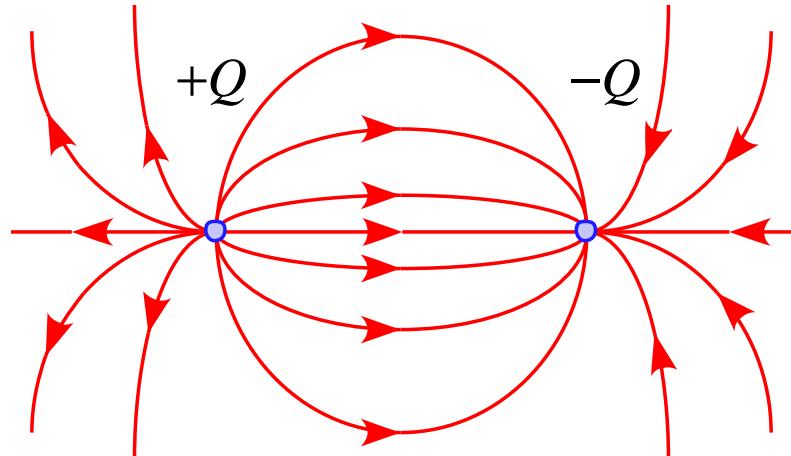


点電荷  $-Q$  [C] が存在

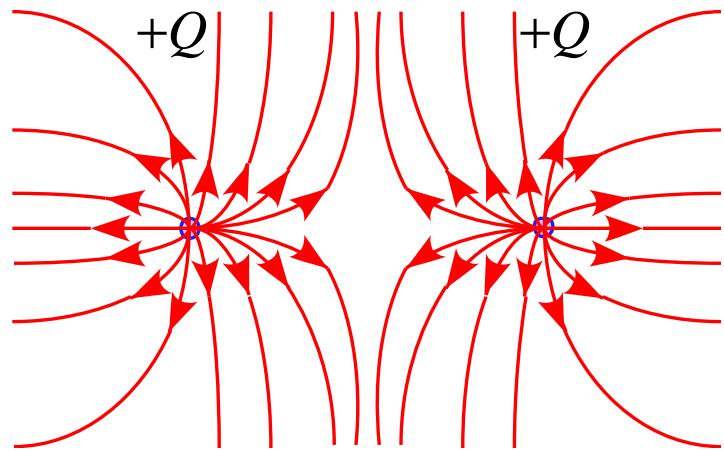


# 電場～電気力線

点電荷  $+Q$  [C] と  $-Q$  [C] が存在



点電荷  $+Q$  [C] と  $+Q$  [C] が存在



## 電気力線の性質

- ・電気力線は正電荷から始まり、負電荷で終了する (途中で消えない)
- ・電荷が1個しかない場合は、無限遠方まで続いている
- ・電気力線の各点の接線は、その点の電場の向きを示している
- ・電気力線の密集地では、電場の大きさが大きい
- ・電気力線自体は短くなるとする
- ・電気力線は交差しない

# 電場～静電エネルギー

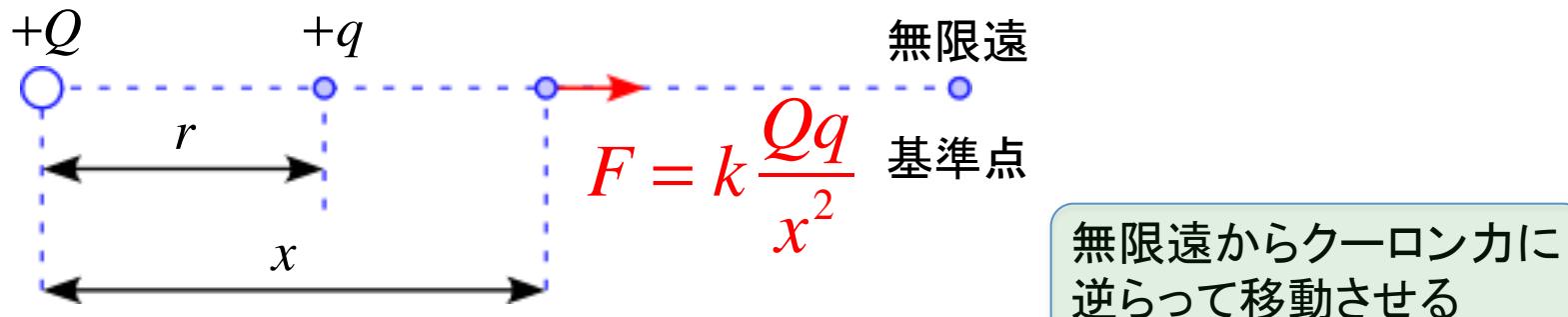
電場中の電荷には静電気力(クーロン力)が働く

静電気力による位置エネルギー → 静電エネルギー

点電荷  $Q$  から距離  $r$  の位置にある点電荷  $q$  がもつ静電エネルギー

$$U = k \frac{Qq}{r} \quad [\text{J}]$$

但し、 $U$  の基準は  $U = 0$  となる無限遠方 ( $r = \infty$ ) である



# 静電エネルギー～電位

電位

試験電荷  $+1 \text{ [C]}$  がもつ静電エネルギー



単位電荷当たりの位置エネルギー

即ち、

静電エネルギー  $U$ 、着目している電荷  $+q$  とすると

電位  $V$  は

$$V = \frac{U}{q}$$

$+1 \text{ [C]}$  の電荷を、静電気力に逆らって  
基準点から考えている点まで運ぶのに要する仕事

となる

$+1 \text{ [C]}$  の電荷に  $1 \text{ [J]}$  の仕事をして、基準点からある場所まで移動させたとき、  
そのある場所の電位を  $1 \text{ [V]}$  とする。

# 静電エネルギー～電位

点電荷の場合

$$V = \frac{U}{q} = k \frac{Qq}{r} \cdot \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r}$$

となる

これは、無限遠を基準とした、

$Q$  [C] の電荷から  $r$  [m] 離れた点での電位  $V$  [V]を表している

# 電位～等電位面

等電位面

電位が等しい平面、曲面



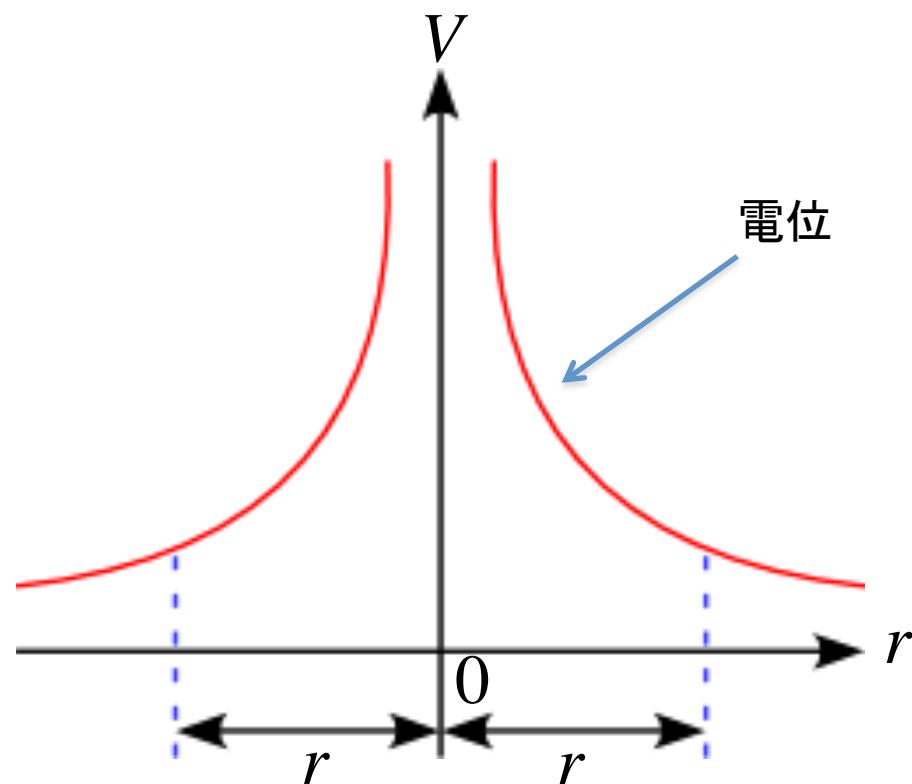
単位電荷当たりの位置エネルギー

点電荷  $+Q$  が1つ存在しているとすると

電位  $V$  は

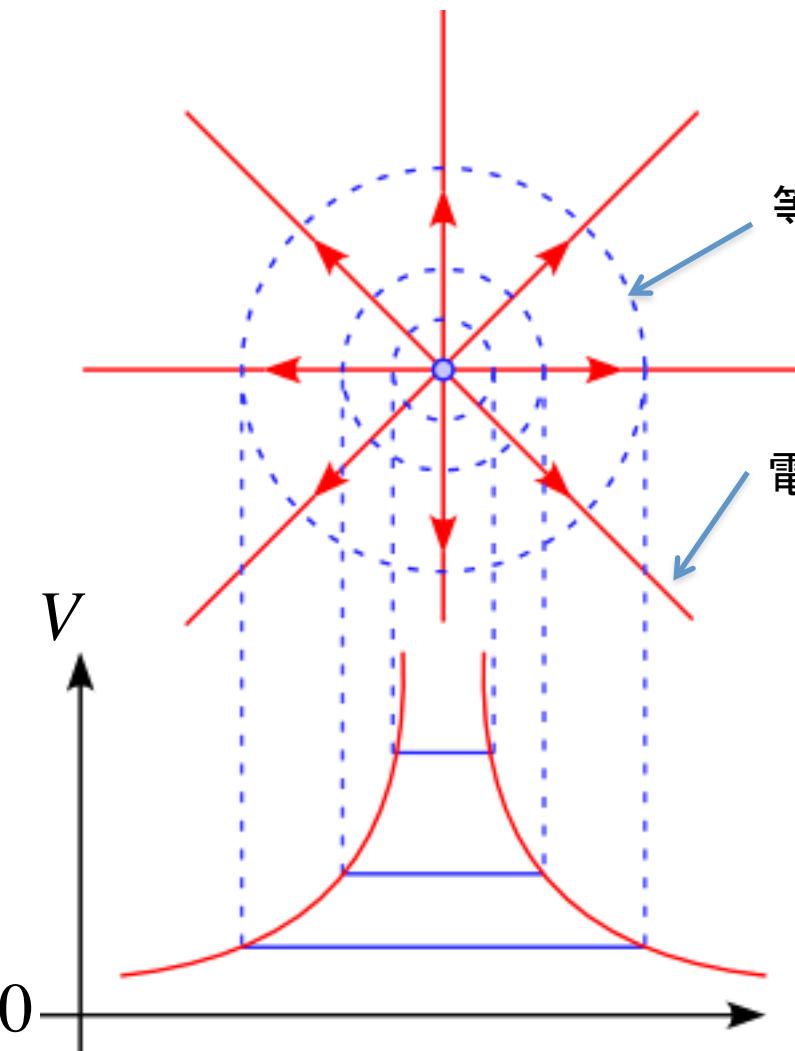
$$V = \frac{U}{q} = k \frac{Q}{r}$$

と表せる

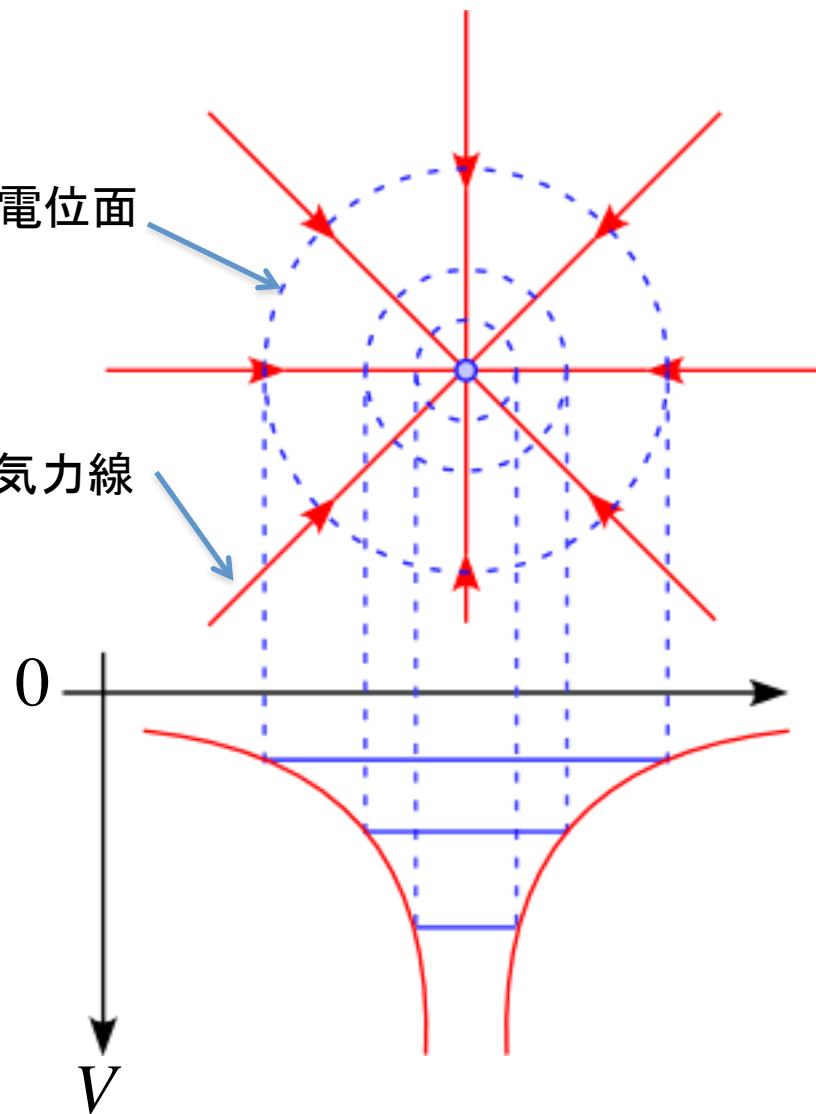


# 電位～等電位面

点電荷  $+Q$  [C] が存在



点電荷  $-Q$  [C] が存在





# クーロン力～ベクトル

クーロン力のベクトル表示

図のように2つの点電荷があるとする

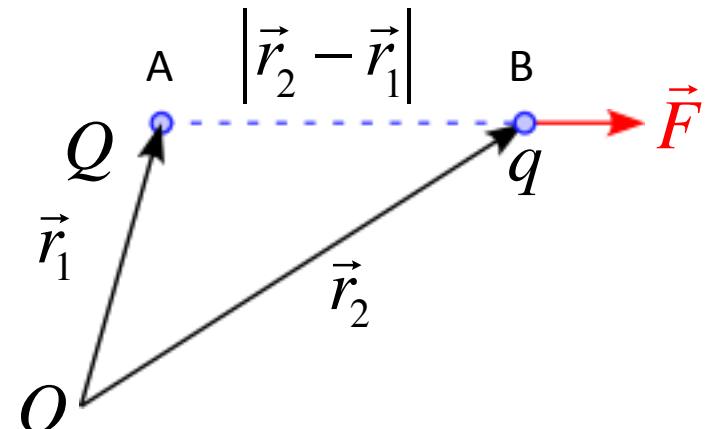
AB間の距離は

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

であるから、  
クーロン力  $\vec{F}$  の向きを表す単位ベクトル  $\vec{i}$  は

$$\vec{i} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

となるので



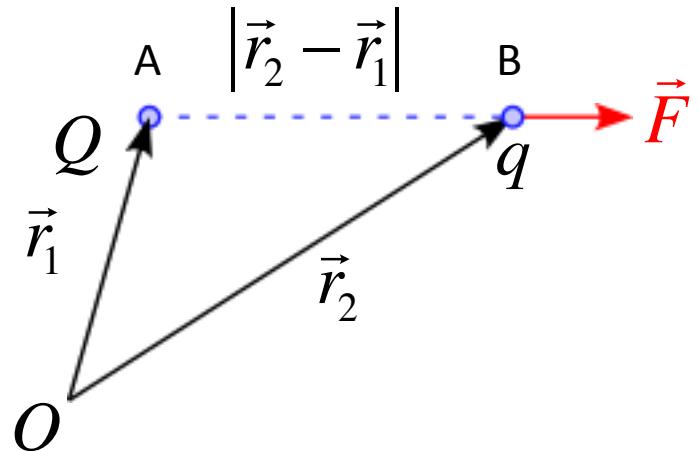
$$\vec{F} = k \frac{Qq}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

と表せる

# 電場～ベクトル

電場  $\vec{E}$  は  
単位電荷に働くクーロン力なので  
Aの点電荷  $Q$  が、Bの位置につくる電場は

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\vec{F}}{q} \\ &= k \frac{Q}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\end{aligned}$$



と表せる

# クーロン力～静電エネルギー

図において、点電荷  $Q$  をクーロン力に逆らってBからCまで運ぶのに必要な仕事を考える

Aから距離  $x$  の地点の力は

$$F = k \frac{Qq}{x^2}$$

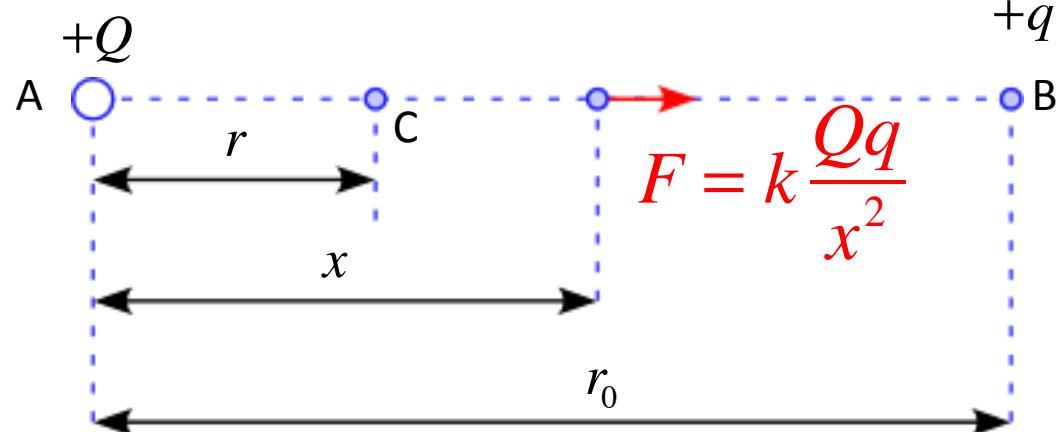
よって求める仕事を

$$\begin{aligned} W &= - \int_{r_0}^r F dx = - \int_{r_0}^r k \frac{Qq}{x^2} dx \\ &= \left[ k \frac{Qq}{x} \right]_{r_0}^r = kQq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \end{aligned}$$

ここで、基準点Bを無限遠とすると

$$U = W = k \frac{Qq}{r}$$

となる



# クーロン力～静電エネルギー

A点の点電荷  $Q$  がつくる電場の中を、B点から点電荷  $q$  を任意の経路を経てC点まで運ぶ仕事を考える

短い区間  $ds$  を移動するときに要する仕事は

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$$

よって求める仕事は

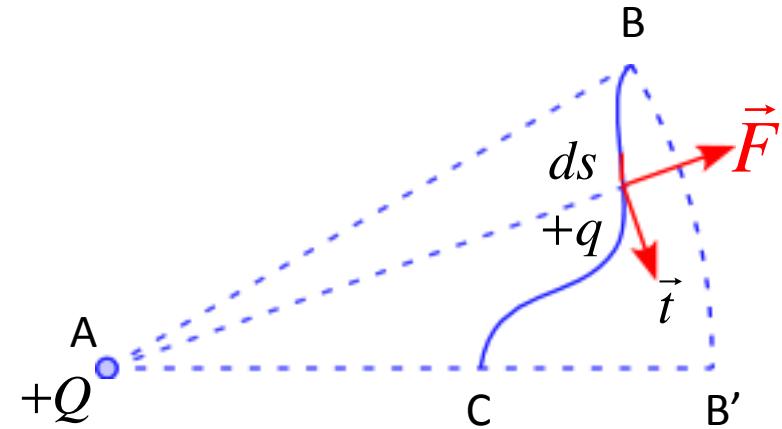
$$W = - \int_{BC} (\vec{F} \cdot \vec{t}) ds$$

$$= -q \int_{BC} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds$$

ここで、A点を中心とする半径ABの円を考え、ACの延長線上の点をB' とすると  
経路BB'は移動方向と力の向きが垂直なので仕事は0であるから

$$W = -q \int_{BC} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds = -q \int_{B'C} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds$$

となる



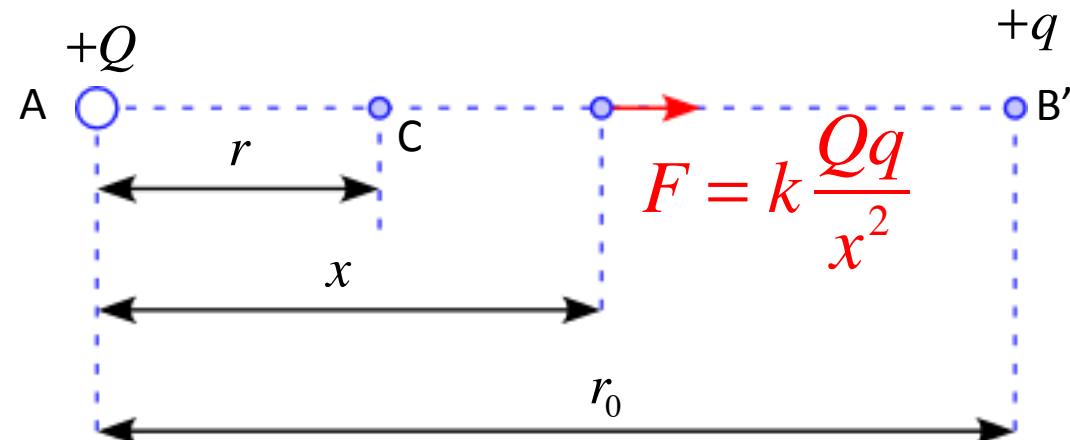
# クーロン力～静電ポテンシャル

これは図の様に簡単に考えられるので

以前の計算と同様に

$$W = kQq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

となる



電位の定義から電位(静電ポテンシャル)を  $\phi$  とおくと

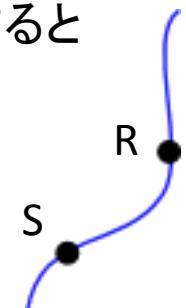
$$\phi = \frac{W}{q} = - \int_{BC} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds$$

ある任意の点R、点Sを考え、それぞれの静電ポテンシャルを  $\phi_R, \phi_S$  とすると

点Sに対する点Rの静電ポテンシャルは

$$\phi_R - \phi_S = - \int_{RS} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds$$

となる



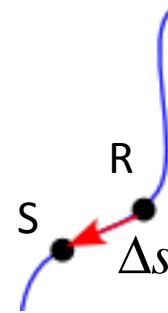
# クーロン力～静電ポテンシャル

ここで、RS間の距離が微小の場合

$$\phi_R - \phi_S = -(\vec{E} \cdot \vec{t}) \Delta s$$

$$\vec{E} \cdot \vec{t} = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\phi_R - \phi_S}{\Delta s}$$

$\overrightarrow{RS}$ 方向の電場の成分



これを3次元空間に拡張すると  
電場の  $x$  成分は  $\vec{E} \cdot \vec{i}$  となるので

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{i} &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \\ &= - \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \end{aligned}$$

# クーロン力～静電ポテンシャル

同様に、電場の  $y, z$  成分は  $\vec{E} \cdot \vec{j}, \vec{E} \cdot \vec{k}$  となるので

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \quad \vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{k} = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z}$$

よって

$$\vec{E}(x, y, z) = \left( -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x}, -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y}, -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \right)$$

従って、

$$E(\vec{r}) = \left( -\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x}, -\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial y}, -\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial z} \right)$$

$$= -\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(\vec{r}) = \boxed{-\nabla \phi(\vec{r})}$$

$\nabla \phi$   
grad  $\phi$   
 $\phi$  の「勾配」

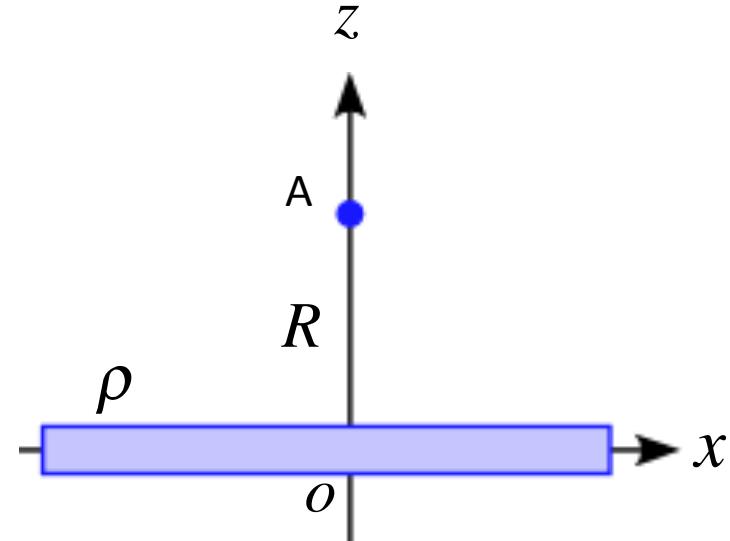


# クーロンの法則～線電荷

単位長さあたりの電気量(線密度)が  $\rho$  である無限に長い直線上の電荷がある。

直線から距離  $R$  にある点Aでの電場の大きさを求めよ。

但し、線の太さは無視できるものとする。



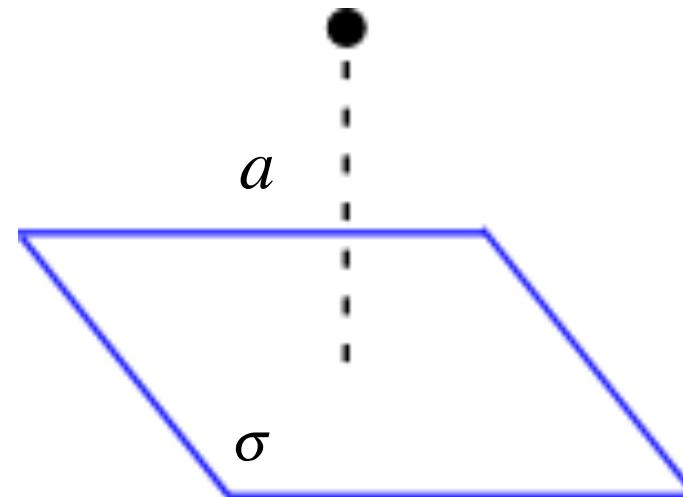
# クーロンの法則～面電荷

無限に広い平面がある。

この平面上に面密度  $\sigma$  で一様に電荷が分布しているとする。

この平面から距離  $a$  だけ離れた点での電場の大きさを求めよ。

但し、真空誘電率は  $\epsilon_0$  とする。

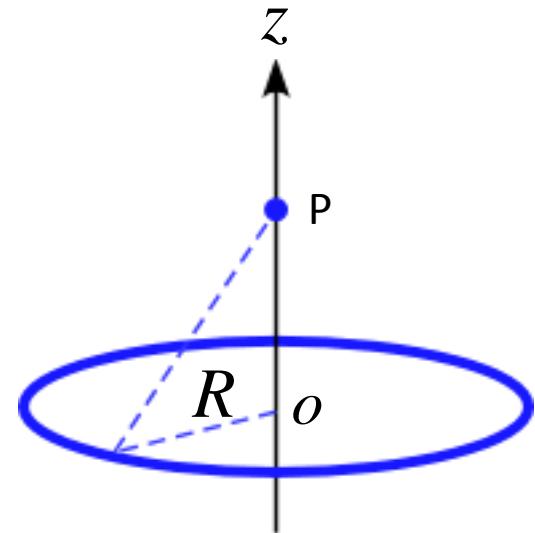


# クーロンの法則～リング状電荷

図のような  $z$  軸を中心軸にもつ半径  $R$  のリング状の電荷がある。

単位長さあたりの電荷量(線密度)が  $\rho$  である場合、

$z$  軸上の点  $P$  での電場の大きさを求めよ。

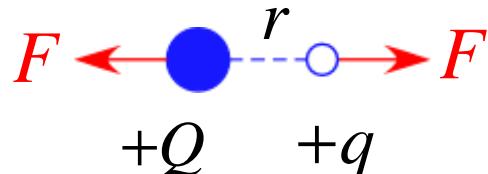


# クーロンの法則～周辺のまとめ

クーロン力  
(静電気力)

$$F = k \frac{Qq}{r^2}$$

$$\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} = [\text{N}]$$



仕事(力の距離積分)



静電エネルギー

$F$  に逆らってする仕事

$$U = W = - \int F dx = - \int_{r_0}^r k \frac{Qq}{r^2} dx$$

$$= kQq \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$r_0 \rightarrow \infty$  無限遠基準

$$= k \frac{Qq}{r}$$

$\times \frac{1}{q}$

電場

+1 [C]当たりのクーロン力

$$E = \frac{F}{q} = k \frac{Qq}{r^2} \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r^2}$$

$$\frac{\text{N}}{\text{C}} = [\text{N/C}]$$

$E(\vec{r}) = - \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(\vec{r}) = - \nabla \phi(\vec{r})$

$\times \frac{1}{q}$

電位 :  $V, \phi$

+1 [C]当たりの静電エネルギー

+1 [C]の電荷に1 [J]の仕事を1 [V]

$$V = \frac{U}{q} = k \frac{Qq}{r} \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r}$$



# クーロン力～ガウスの法則

任意の3次元空間中に点電荷  $Q$  が固定してある

この点電荷から距離  $r$  の位置の電場は

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

と表せる

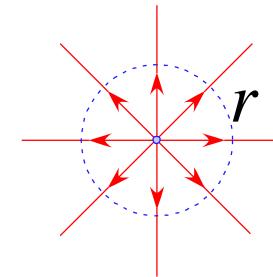
ここで電気力線について考える

電気力線も電場と同じ向きである

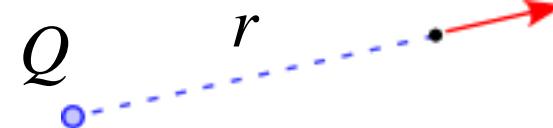
電場の大きさを表すのに電気力線の本数を考える

単位面積当たり  $E$  本の電気力線を引くとする

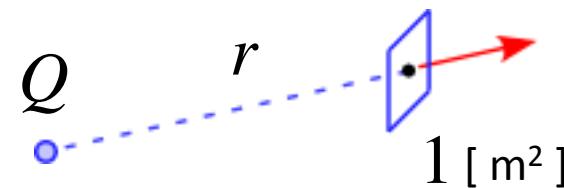
電気力線の密度を見ることで電場の大きさを  
視覚的にとらえることができる



$$E = k \frac{Q}{r^2}$$



$$E = k \frac{Q}{r^2} \text{ [本]}$$



この点電荷  $Q$  から出る電気力線の総本数  $N$  を求める

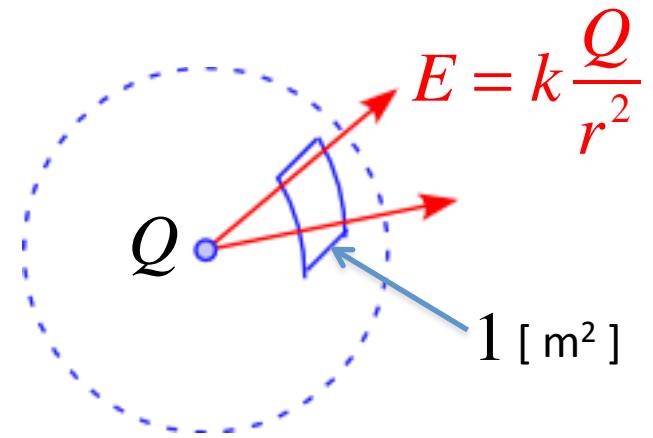
この点電荷から3次元的に放射状に電気力線が  
出ているので

半径  $r$  の球の面積を  $S$  とすると

$$N = E \cdot S$$

$$= k \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$= 4\pi k Q \text{ [本]}$$



形状に関する量  $r$   
が含まれていない



帯電体の形状に関係ない

ガウスの法則

単位面積当たり  $E$  本の電気力線を引くとすると

電荷  $Q$  から湧き出す電気力線の総本数  $4\pi k Q$  [本] である

# コンデンサー

2枚の平面金属極板を平行に設置したものを考える

更に電池を接続し、図のような回路にした

電池は金属板Aの自由電子を金属板Bへ運ぶ



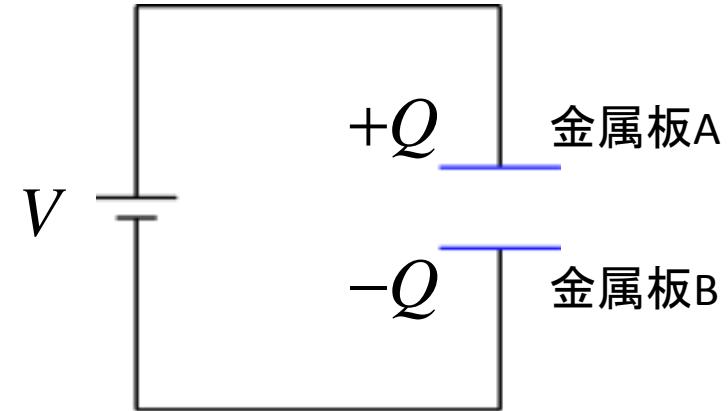
金属板はそれぞれ正負に帯電



A,Bの電位差が電池の電位差と等しくなる



自由電子の移動が止まる



電池を切り離しても電荷は失われない ( A上の電荷とB上の電荷は引きあう為 )

電気(電荷)を蓄える装置

金属板に蓄えられる電気量は互いに大きさが等しく、異符号の電気量

# コンデンサー～ガウスの法則

平面上の電荷なのでガウスの法則を考える

電気力線の総本数は  $4\pi kQ$  [本]

であるから図のようになる

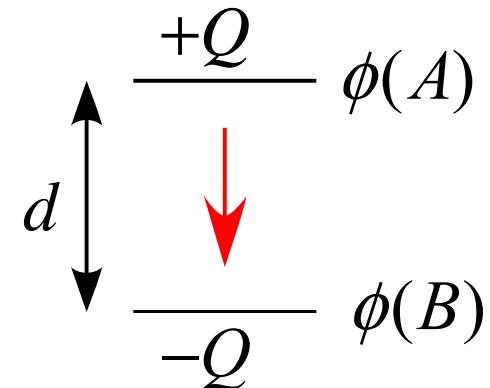
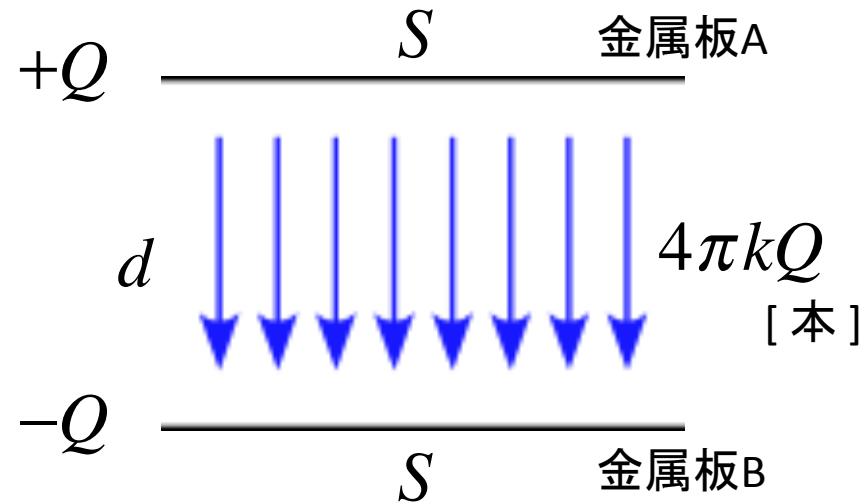
単位面積当たりの電気力線の本数は  
電場の大きさに等しい

よって、コンデンサーの電極板の  
電場の大きさは極板面積を  $S$  とすると

$$E = \frac{4\pi kQ}{S}$$

ここで、AB間の電位差を  $V$ 、極板間隔を  $d$  とすると  
位置エネルギーと仕事の関係から

$$V = \phi(B) - \phi(A) = E \cdot d$$



# コンデンサー～ガウスの法則

従って、電場  $E$  は

$$E = \frac{4\pi kQ}{S} = \frac{V}{d}$$

となる

蓄えられる電気量  $Q$  は

$$Q = \frac{1}{4\pi k} \frac{S}{d} \cdot V$$

となり、AB間の電位差を  $V$  に比例していることがわかります

この比例定数は

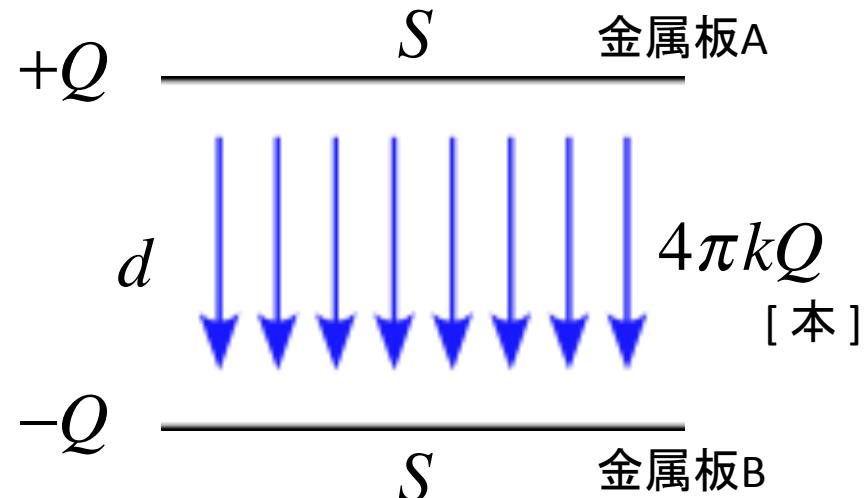
$$C = \frac{1}{4\pi k} \frac{S}{d}$$

静電容量

[ F ] キャパシタンス

と表される

真空中では「真空誘電率」 $\epsilon_0$  で表される



# コンデンサー～静電エネルギー

コンデンサーの極板に電荷が蓄えられる際

極板間の電位差に逆らって電荷を運ぶのに仕事を要する

$$Q = \frac{1}{4\pi k} \frac{S}{d} \cdot V = CV$$

と表される

式変形して

$$V = \frac{Q}{C}$$

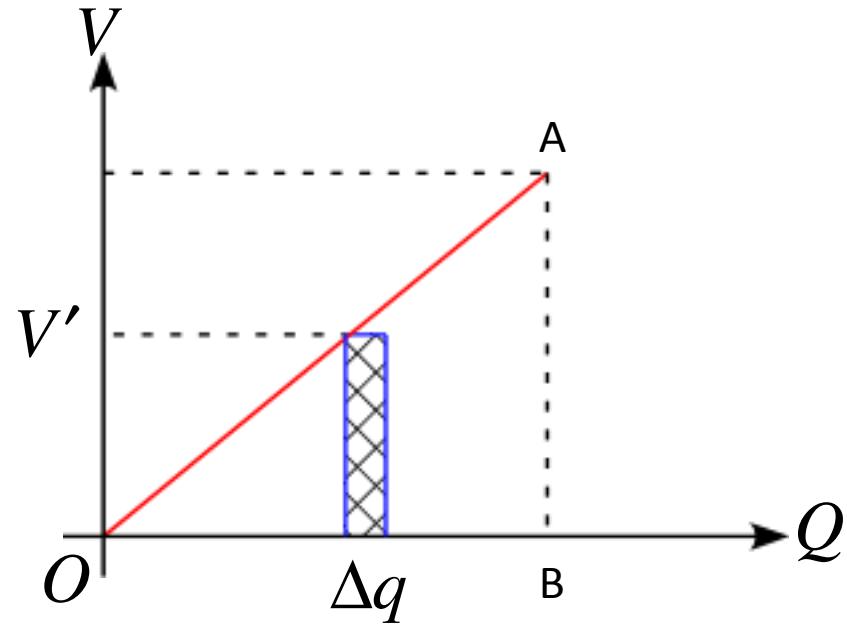
これをグラフで表すと、図の様になります

充電途中で電位差が  $V'$  になったとき

微小電気量  $\Delta q$  を充電するために要する仕事は

$$\Delta W = \Delta q V'$$

と表される



# コンデンサー～静電エネルギー

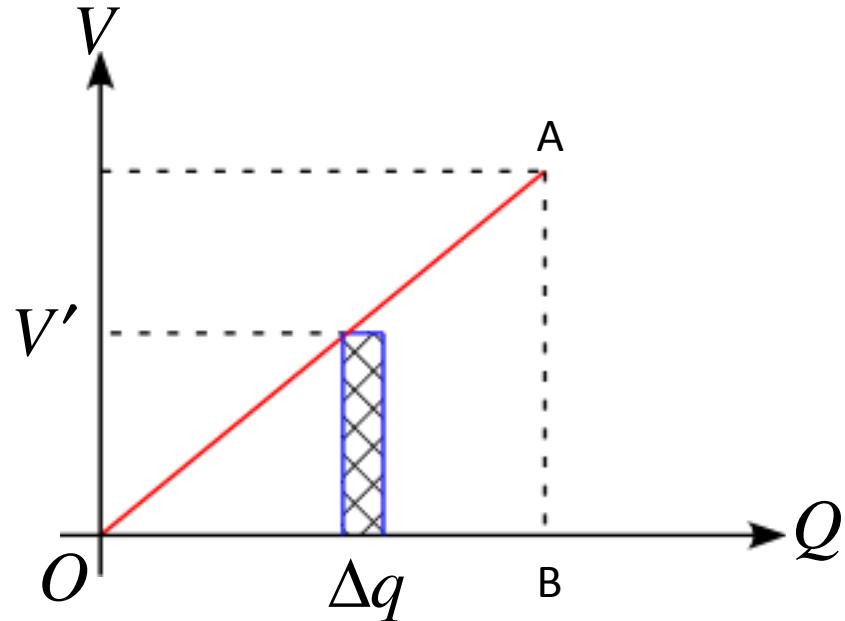
よって、電位差  $V$  まで充電に要する全仕事は

$$W = \frac{1}{2} QV$$

従って、コンデンサーの静電エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

となる



# コンデンサー

$$Q = CV$$

$Q$ ：蓄えられる電気量

$C$ ：静電容量

$V$ ：電位差

$S$ ：極板面積

$d$ ：極板間距離

$\epsilon_0$ ：真空誘電率

$k$ ：クーロン定数

$U$ ：静電エネルギー

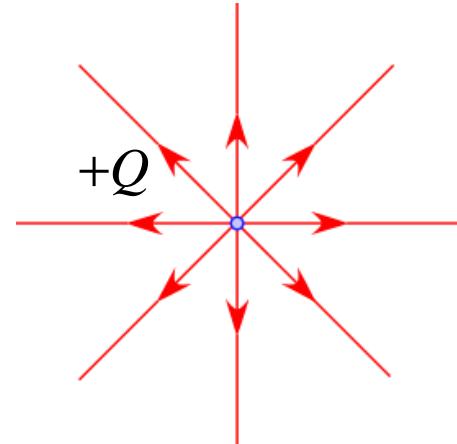
$$C = \frac{1}{4\pi k} \frac{S}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

# クーロンの法則～ガウスの法則

点電荷  $Q$  から距離  $r$  離れたところでの電場の大きさは

$$E = k \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



であり、向きは点電荷から放射上になっている

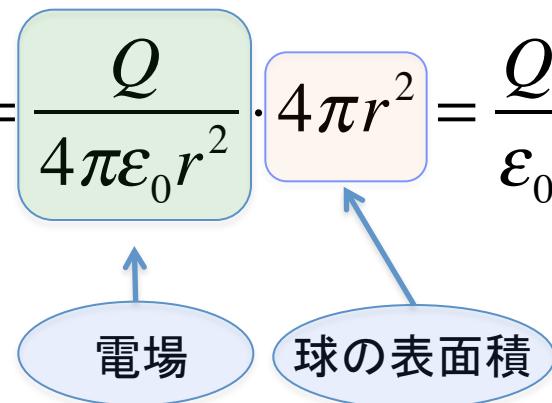
単位面積当たり  $E$  本の電気力線を引く



電場の球面  $S$  に対する積分はこれに球の表面積をかけたものでなくてはならない

従って、

$$\text{全電気力線数} = \int_{\text{surface } S} E dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

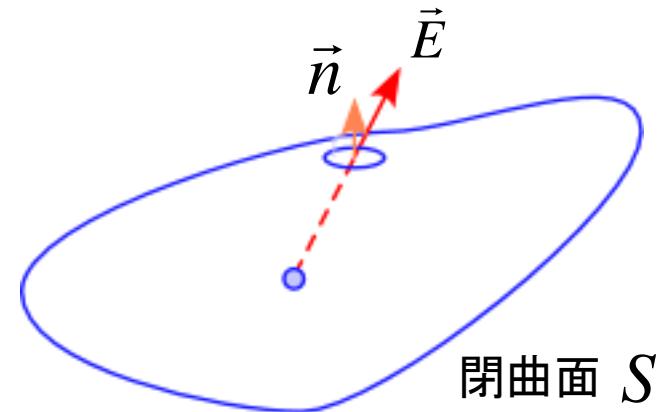


# クーロンの法則～ガウスの法則

任意の閉曲面を考えた場合

面に対する法線単位ベクトル  $\vec{n}$  を導入すると

$$\text{全電気力線数} = \int_{\text{closed surface } S} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



点電荷ではなく、任意の大きさの帯電体とし

電荷密度を  $\rho$  で表すと

$$Q = \int_{\text{volume } V} \rho dV$$

となるので、

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

積分形のガウスの法則

となる

# クーロンの法則～ガウスの法則

正電荷  $Q$  から湧きだした電気力線は、負電荷に吸い込まれるまで途中で増えたり減ったりしない

電気力線の保存

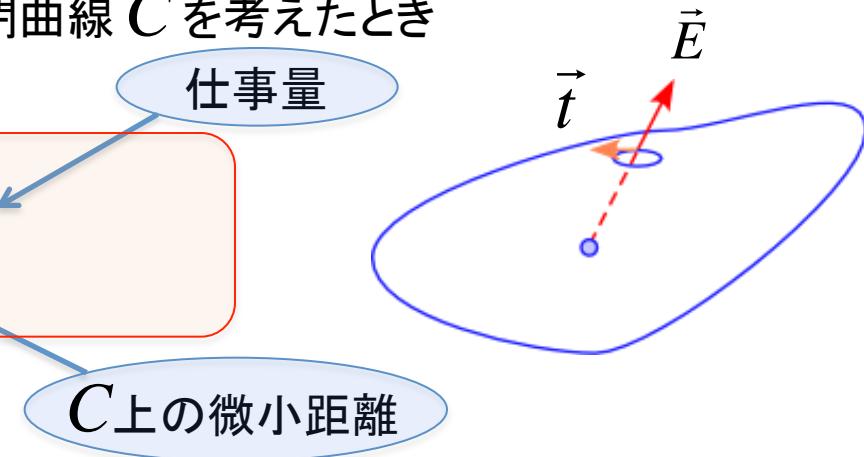
定義より

電気力線：試験電荷が着目電荷から受ける力によって移動する道筋

ここで、ある任意の閉曲面  $S$  上の任意の閉曲線  $C$  を考えたとき  
単位接線ベクトル  $\vec{t}$  を導入すると

$$\int_C \vec{E} \cdot \vec{t} ds = 0$$

が成立する



正電荷  $Q$  から湧きだした電気力線は、正電荷のまわりに電気力線の渦を作ることはない

無渦条件

# ガウスの法則～積分形

以上をまとめると

任意の面  $S$  を垂直に横切る電気力線の総数は内部電気量に依存し、

比例定数は  $\frac{1}{\epsilon_0}$  である

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

電気力線の総数

内部電気量

正電荷のまわりに電気力線の渦はできない

$$\int_C \vec{E} \cdot \vec{t} ds = 0$$

# ガウスの法則～微小部分

図のような直方体を考える

斜線の2つの面に着目する

電場  $E$  の面に垂直な成分は  $E_x$

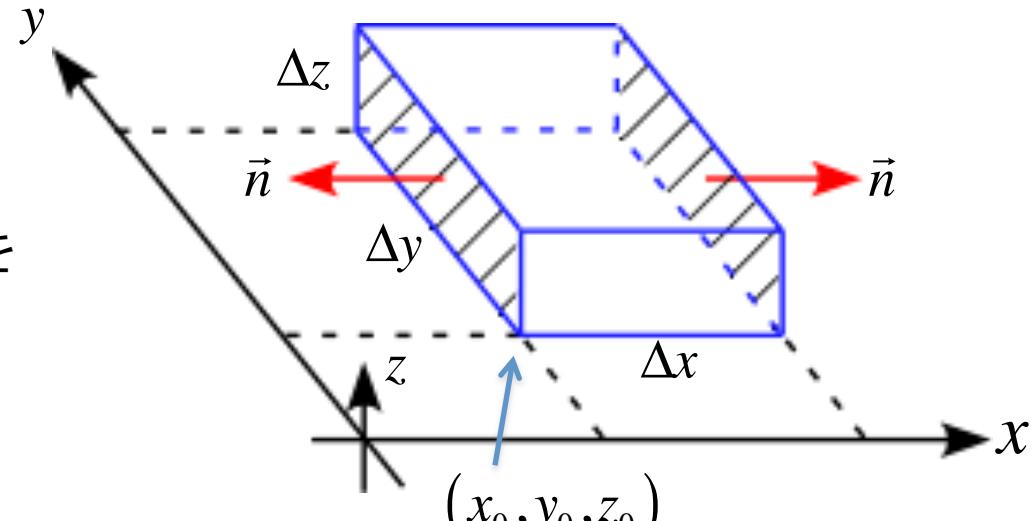
それぞれの位置での電場の成分を

$$E_x(x_0) \quad E_x(x_0 + \Delta x)$$

と表すとする

$x$  方向に湧きだす電気力線の総数  $N_x$  は

$$\begin{aligned} N_x &= E_x(x_0 + \Delta x) \Delta y \Delta z - E_x(x_0) \Delta y \Delta z \\ &= \{E_x(x_0 + \Delta x) - E_x(x_0)\} \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \Delta z \end{aligned}$$



近似式(テーラー展開)

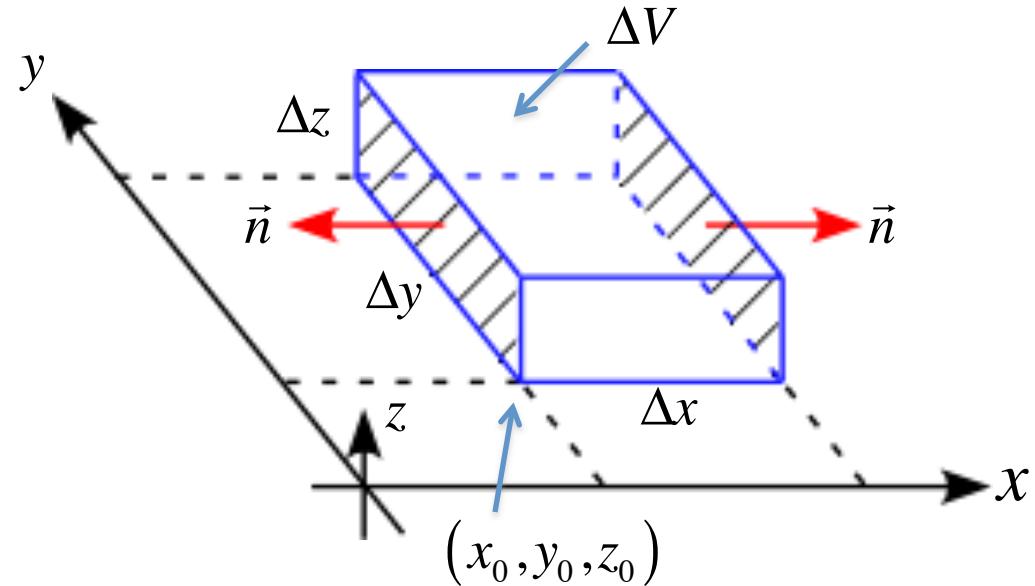
$$\begin{aligned} E_x(x_0 + \Delta x) &\approx E_x(x_0) + \left[ \frac{dE_x(x)}{dx} \right]_{x=x_0} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

# ガウスの法則～微小部分

同様に、 $y, z$  方向については

$$N_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta y \cdot \Delta x \Delta z$$

$$N_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta z \cdot \Delta x \Delta y$$



よって、この直方体から湧きだす電気力線の総数 $N$ は

$$\begin{aligned} N &= N_x + N_y + N_z \\ &= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

$$= (\nabla \cdot \vec{E}) \Delta V \quad \leftarrow \text{微小体積 } \Delta V \text{ から湧き出す電気力線の総数}$$

となる

# ガウスの法則～微小部分

任意の体積  $V$  に対しては

$$N_{\text{total}} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

ここで、

$$\text{全電気力線数} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

であるから、

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

となり、2つの式を比較すると

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

# ガウスの法則～微小部分

被積分関数を比較すると

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

書きかえると

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

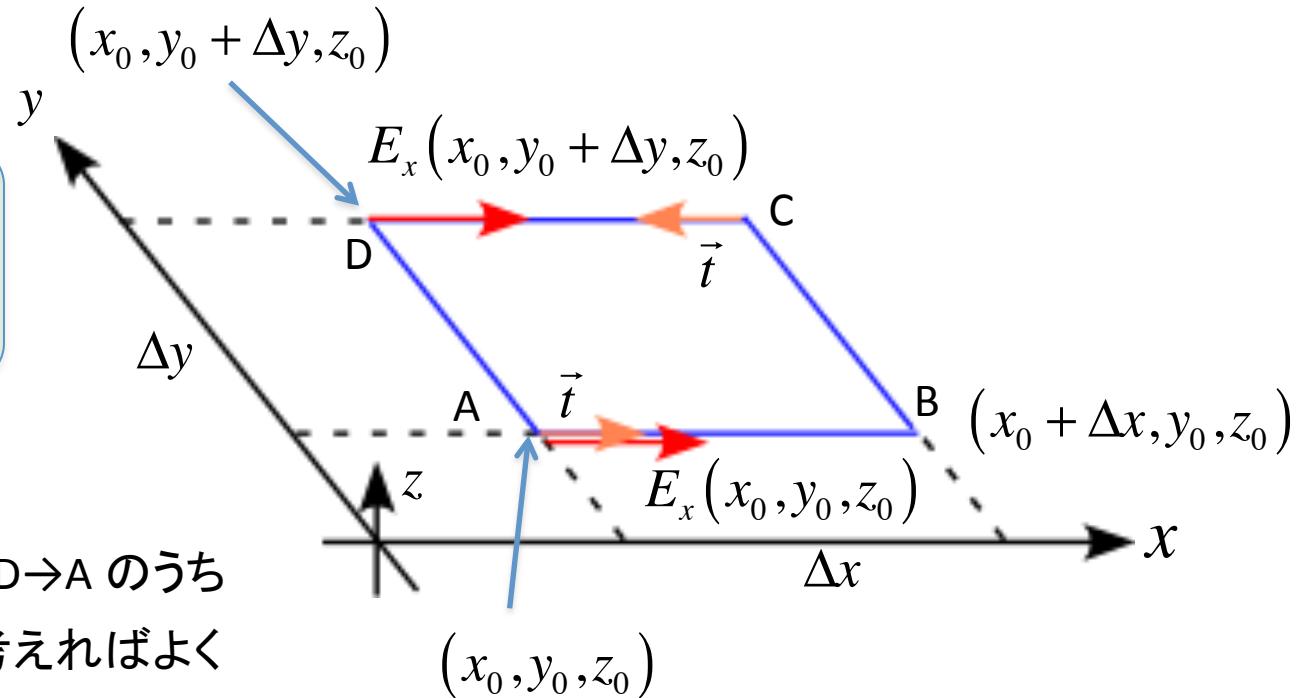
と表すことができる

# ガウスの法則～微小部分

無渦条件についても微小部分を考えると

図のような微小な長方形1周の電場について考える

$x$  成分では  
 $A \rightarrow B + B \rightarrow C + C \rightarrow D + D \rightarrow A$  のうち  
 $A \rightarrow B + C \rightarrow D$  のみを考えればよく



$$E_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x - E_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \cdot \Delta x$$

$$= \{E_x(x_0, y_0, z_0) - E_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)\} \cdot \Delta x$$

# ガウスの法則～微小部分

$$\begin{aligned} &= - \left\{ \frac{E_x(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - E_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} \Delta y \right\} \cdot \Delta x \\ &= - \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y \Delta x \end{aligned}$$

$y$  成分では

$B \rightarrow C + D \rightarrow A$  のみを考えればよく

$$\begin{aligned} &E_y(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \cdot \Delta y - E_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y \\ &= \left\{ E_y(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - E_y(x_0, y_0, z_0) \right\} \cdot \Delta y \\ &= \left\{ \frac{E_y(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - E_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \Delta x \right\} \cdot \Delta y \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

# ガウスの法則～微小部分

従って、長方形1周分は

$$\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\nabla \times \vec{E})_z \Delta x \Delta y = (\nabla \times \vec{E})_z \Delta S$$

となり、 $\nabla$ と電場ベクトル  $\vec{E}$  の外積の  $z$  成分として表すことができる  
全ての成分について計算をし、任意の面積  $S$  に対して積分を行うと

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS$$

と書くことができる

従って、

$$\int_C (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = 0$$

# ガウスの法則～微小部分

従って、

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

が得られる

書きかえると

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

と表すことができる

# ガウスの法則～微分形

以上をまとめると

微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left( \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$$

微分形の無渦条件

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \left( \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \right)$$

# ガウスの定理～ストークスの定理

積分系と微分形を関連付けた式

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

$$\int_C (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS$$

は一般のベクトル  $\vec{A}$  に対しても成立する

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

ガウスの定理 (面積積分と体積積分の関係)

$$\int_C (\vec{A} \cdot \vec{t}) ds = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

ストークスの定理 (線積分と面積積分の関係)

# ラプラスの方程式

微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

に、電場と静電ポテンシャルの関係式

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

を適用し、成分を考えると

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x, E_y, E_z) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

# ラプラスの方程式

従って、

$$\nabla \cdot \vec{E} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$$

ここで、演算子  $\nabla^2$  を

$\nabla^2$ : ラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と定義すると

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi$$

従って、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ポアソンの式 (静電ポテンシャルと電荷の関係式)

特に、真空中に電荷が存在しない場合

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{ラプラスの方程式}$$

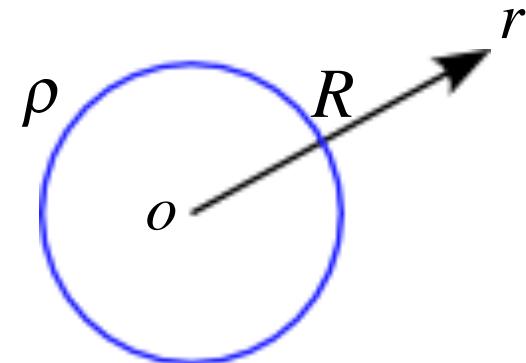
が得られる

# ガウスの法則～例題

図のように、半径  $R$  の球の内部に単位体積あたり電気量  $\rho (> 0)$  の荷電粒子が一様に分布しているとする。

以下の間に答えよ。

- (1) この球の中心から距離  $r (\geq R)$  での電場の大きさ  $E(r)$  を求めよ。
- (2) この球の中心から距離  $r (\leq R)$  での電場の大きさ  $E(r)$  を求めよ。
- (3) 球の内外につくる静電場を距離  $r$  の関数としてグラフを書け。

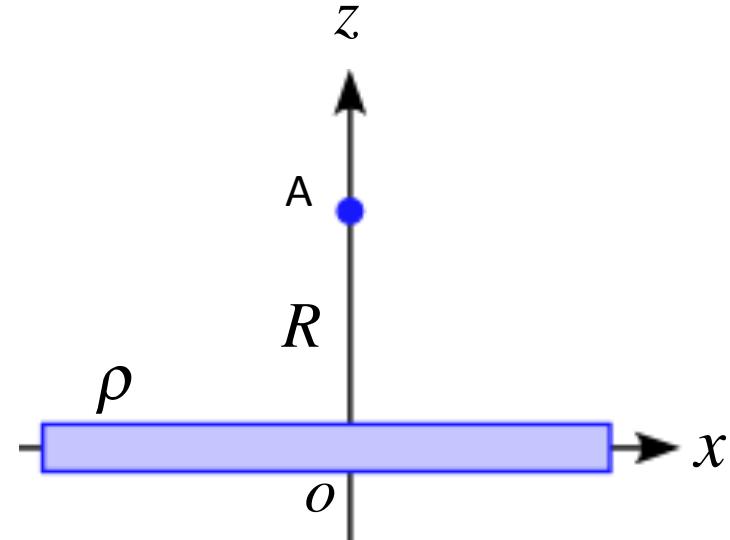


# ガウスの法則～線電荷

単位長さあたりの電気量(線密度)が  $\rho$  である無限に長い直線上の電荷がある。

直線から距離  $R$  にある点Aでの電場の大きさを求めよ。

但し、線の太さは無視できるものとする。



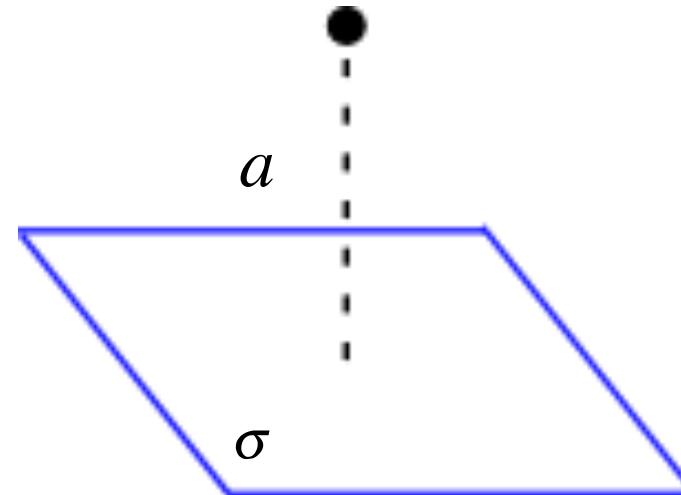
# ガウスの法則～面電荷

無限に広い平面がある。

この平面上に面密度  $\sigma$  で一様に電荷が分布しているとする。

この平面から距離  $a$  だけ離れた点での電場の大きさを求めよ。

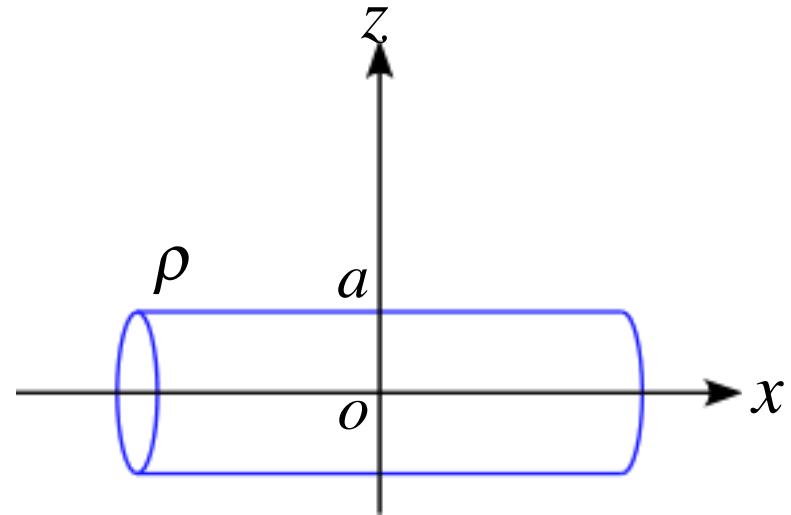
但し、真空誘電率は  $\epsilon_0$  とする。



# ガウスの法則～円筒

図のような半径  $a$  の無限に長い円筒の表面に単位長さ当たり  $\rho$  の電荷量が一様に分布している。

- (1) 円筒の外側  $z(\geq a)$  に生ずる電場を求めよ。
- (2) 円筒の内側  $z(\leq a)$  に生ずる電場を求めよ。



# 電流～電荷の移動

電荷が停止している



静電現象

移動する電荷

= 電気が流れる  
荷電粒子の流れ



電流

電荷の流れが一定 : 定常電流

## 電流の定義

任意の導線断面を単位時間に通過する電気量

任意の断面を  $\Delta t$  [ s ] 間の間に、 $\Delta Q$  [ C ] の電荷が通過したとき、

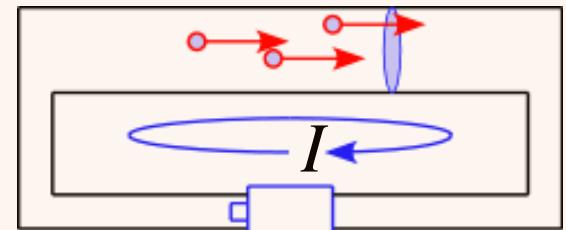
その電流の大きさ  $I$  [ A ] は

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

スカラー量

$$\frac{\text{C}}{\text{s}} = [\text{A}]$$

と定義される



# 電流～電束密度

導線内を通過する電流について

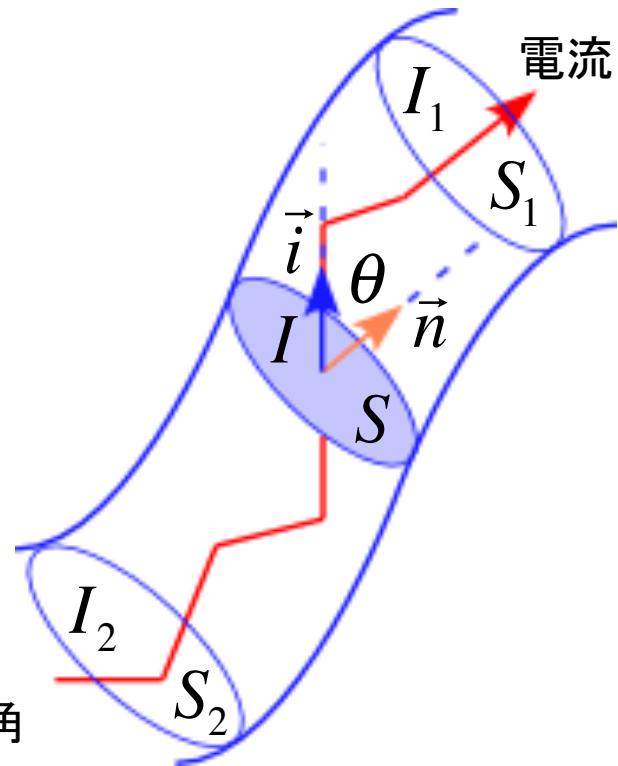
電束密度:  $\vec{i}$

単位面積あたりの電流

断面  $S$  を通過する電流の大きさは

$$I = iS \cos \theta = i_n S = \vec{i} \cdot \vec{S}$$
$$\rightarrow \int_S i_n dS$$

$\theta$ : 断面  $S$  の単位法線ベクトル  $n$  と電流密度とのなす角



導線の断面  $S_1, S_2$  を通過する電流の大きさを  $I_1, I_2$

とすると、電荷保存則により出入りの電流は等しく  $I_1 = I_2$  である

従って

$$\int_{S_1} i_{n1} dS + \int_{S_2} i_{n2} dS = 0$$

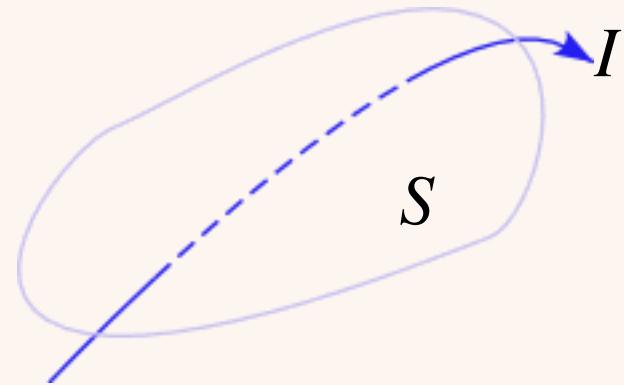
# 電流～電束密度

任意の閉曲面  $S$  上で電流を面積分すると

$$\int_S i_n dS = 0$$

である

電流の保存則



# 直流と交流

電流が時間的に変動しない: 直流

電流が時間的に周期的に変動する: 交流

日本の家庭用コンセント

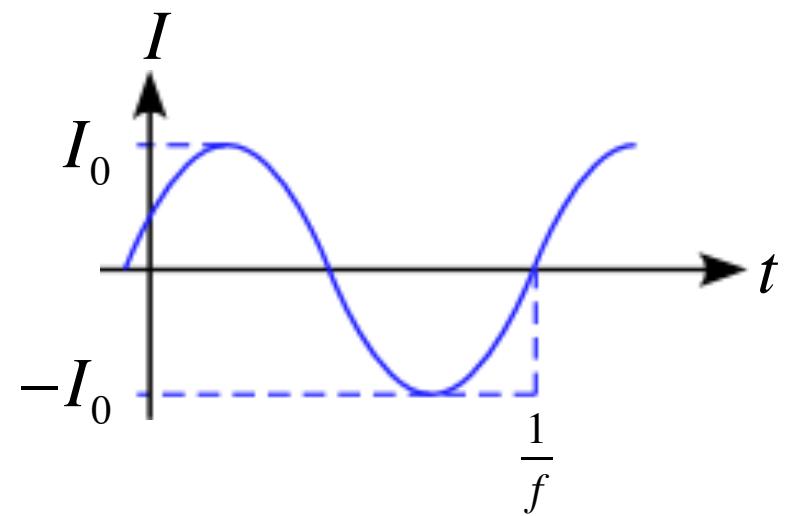
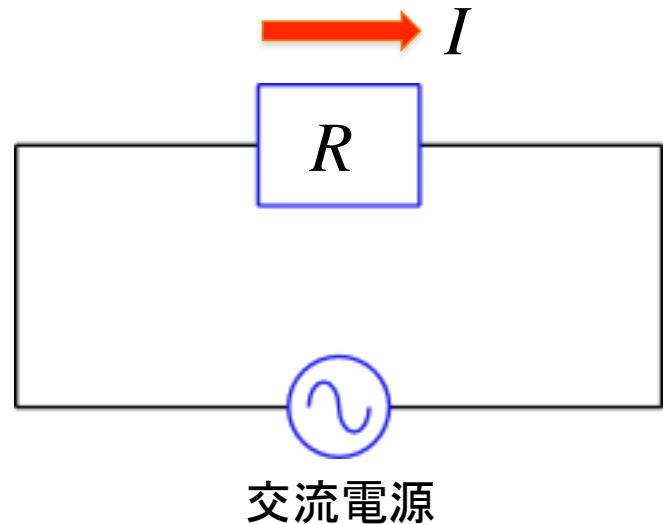
振動数  $f$  は

$$f = 50 \text{ or } 60 \text{ [Hz]}$$

であり、電流は

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft)$$

で変動している



# 電流～オームの法則

電流が流れる為には → 電位差が必要

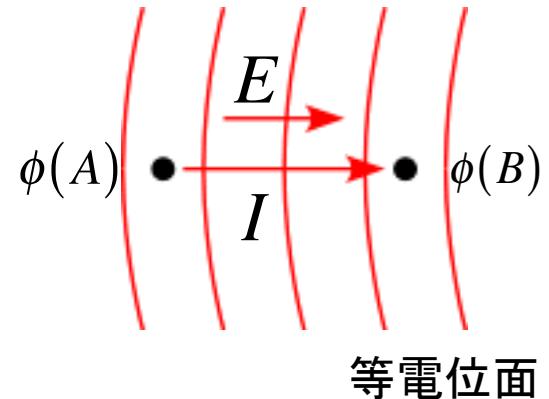
電位差  $V = \phi(A) - \phi(B)$  と

電流の大きさ  $I$  は比例関係

比例定数を  $R$  とすると

$$V = IR$$

オームの法則



比例定数  $R$  について

電位差  $V$  が一定のとき

$R \rightarrow$  大きく →  $I \rightarrow$  小さく

$R \rightarrow$  小さく →  $I \rightarrow$  大きく

電流の流れにくさの度合い  
「抵抗」

電位差  $1V$  の電極間に  $1A$  の電流が流れるときの電気抵抗を  $1\Omega$  とする

# 電流～抵抗

一様な物質で作られた抵抗線

「抵抗」は「電流の流れにくさの度合い」

抵抗線の長さ  $l$  に比例



抵抗線が長ければ長いほど、電流は流れにくい

導線の断面積  $S$  に反比例



断面積が広ければ広いほど、電流は流れやすい

比例定数  $\rho$  として

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$$

$\rho$  : 電気抵抗率

$\sigma = 1/\rho$  : 電気伝導率

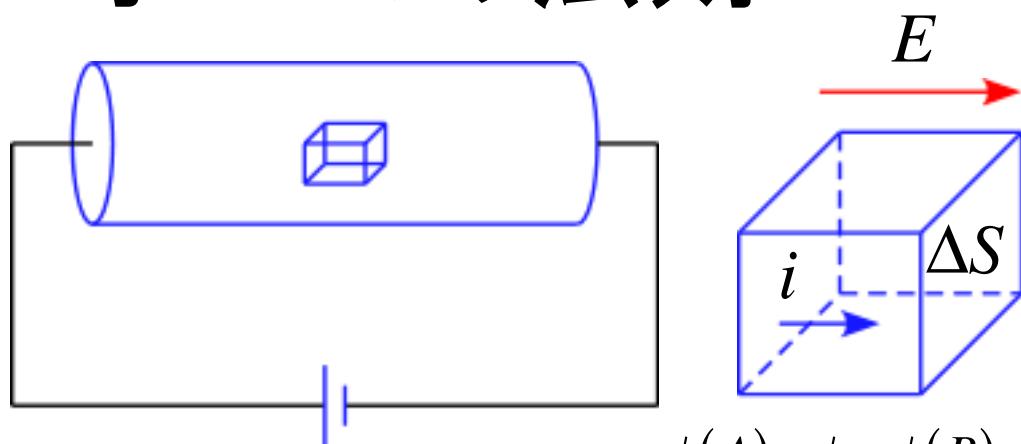
$\rho, \sigma$  : 抵抗線の物質に依存

$$\rho = R \frac{S}{l}$$

$$\Omega \frac{m^2}{m} = [\Omega \cdot m]$$

# 抵抗～オームの法則

図のように導線中の  
微小部分を考える  
長さ  $\Delta l$ 、断面積  $\Delta S$   
電位差  $\Delta\phi$  とする



微小導体に電束密度  $i$  の電流が流れているとき  
この微小導体の電気抵抗は

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\Delta\phi}{i\Delta S} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$$

微小部分での電場の大きさは  $E = \Delta\phi / \Delta l$  なので

$$i = \frac{1}{\Delta S} \left( \Delta\phi \cdot \sigma \frac{\Delta S}{\Delta l} \right) = \sigma E$$

従って

$$\vec{i} = \sigma \vec{E}$$

一般化されたオームの法則

# オームの法則～電子論

オームの法則の理論的な議論

図のような抵抗線ABを考える

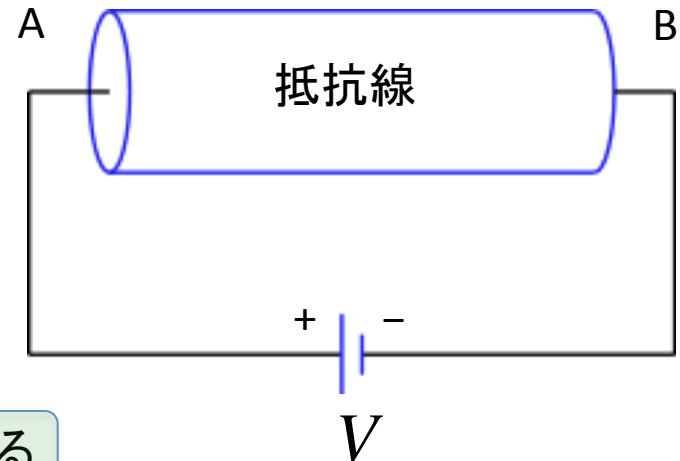
任意の断面  $S$  を単位時間に通過する

電気量を求める

電子は負の電荷



BからAに向かって流れる



この電子の平均の速さを  $v$  とすると

単位時間に進む距離は  $v$  なので

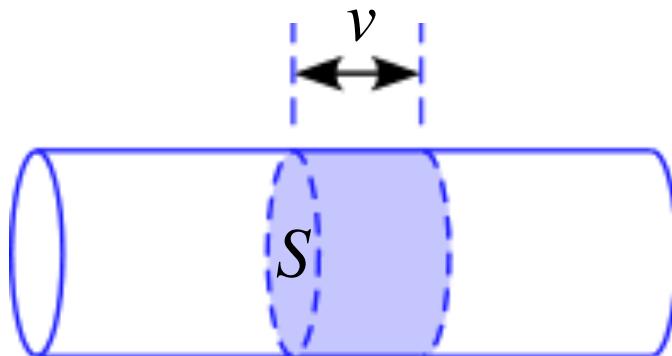
単位時間に通過できる電子は

右図の色付きの部分にある電子となる

抵抗線の電子密度を  $n$  とおくと

単位時間に  $S$  を通過する電子の個数  $N$  は

$$N = nvS$$



# オームの法則～電子論

1個当たりの電気量を $-e$  とすると

単位時間に $S$  を通過する電気量の大きさ

即ち、電流  $i$  の大きさは

$$i = |-e| \cdot N$$
$$= envS$$

電子の運動をモデル化すると

電場からの力:  $B \rightarrow A$

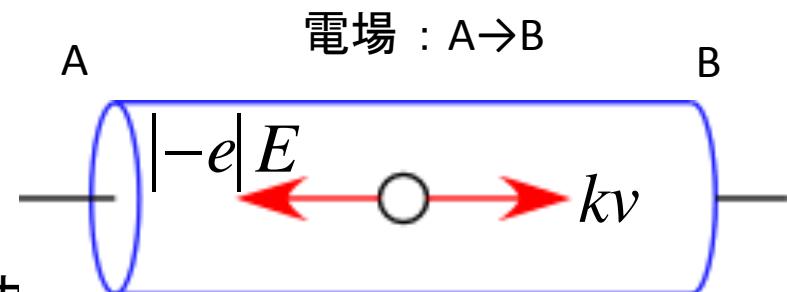
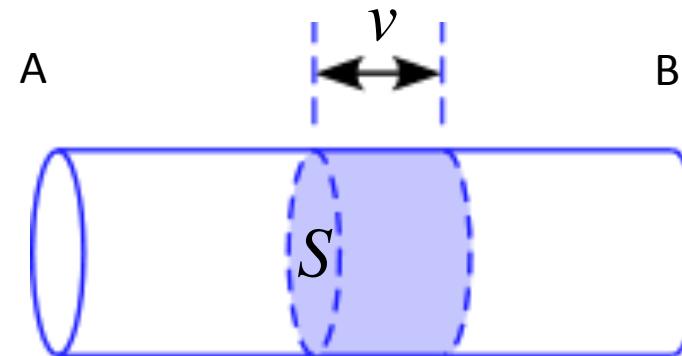
原子や正イオンからの妨害: 速度比例の抵抗力

この2つがつり合って、一定の速さで運動するとする

$$|-e| \cdot E = kv$$

$$eE = kv$$

が成立する



# オームの法則～電子論

ここで、抵抗線の長さを  $l$  とすると  
電位差  $V$  なので、電場  $E$  の大きさは

$$E = \frac{V}{l}$$

と表されるので、

$$e \cdot \frac{V}{l} = kv$$

よって電子の速さ  $v$  は

$$v = \frac{eV}{kl}$$

となる

電流の式に代入すると

$$i = envS$$

$$= en \frac{eV}{kl} S$$

$$= \frac{e^2 n S}{kl} V$$

式変形をして

$$V = \frac{k}{e^2 n} \frac{l}{S} \cdot i$$

従って、抵抗  $R$  は

$$R = \frac{k}{e^2 n} \frac{l}{S}$$

となり、オームの法則が成立している

# ジュールの法則

2点間 A - B の電位差が

$$V = \phi(A) - \phi(B)$$

のとき、電荷  $q$  が点Aから点Bに移動すれば

電荷は外部に対して次のような仕事をする

$$W = q \{ \phi(A) - \phi(B) \} = qV$$

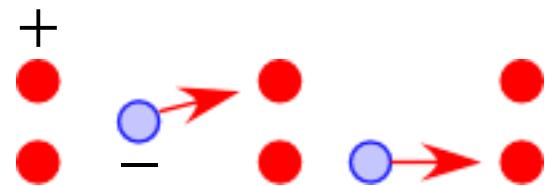
オームの法則を使うと、電荷に対する仕事率は

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \quad [W]$$

ジュール熱

ジュールの法則

$P = 1 \text{ W}$  は毎秒 1 J の仕事をする



電子が原子に衝突し  
原子の振動を激しくさせる

↓ 振動エネルギー

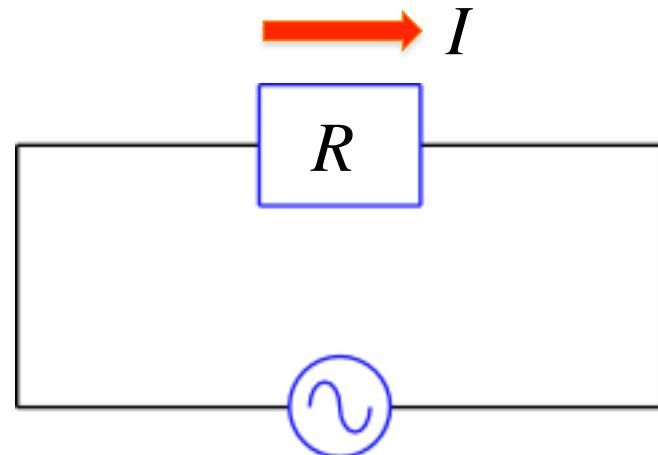
電気抵抗  $R$  がある回路では、電荷の持つエネルギーは抵抗により失われる  
失われたエネルギーは抵抗周辺の熱エネルギーとして散逸していく

# 直流と交流～例題

電流が時間的に周期的に変動する電流  $I(t)$  が

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft)$$

で表される電流がある。



(1) 抵抗  $R$  に流したときの仕事率  $P$  を求めよ。

(2) このときの平均電流の大きさを求めよ。

# 起電力

電源

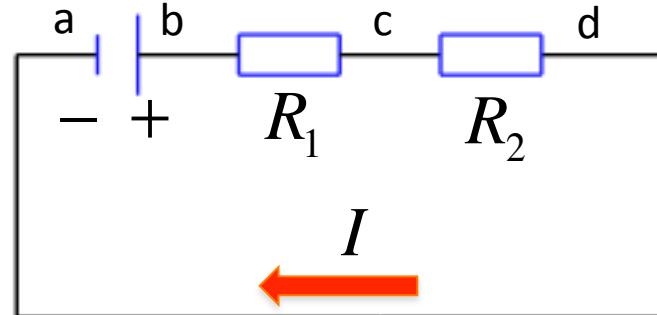
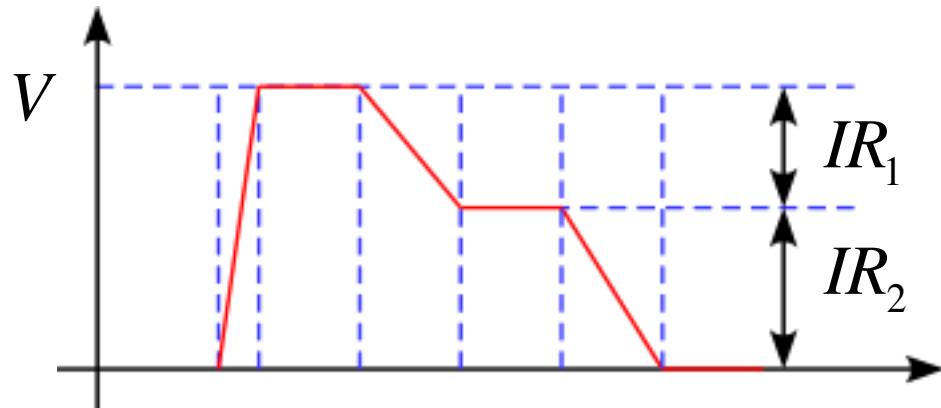
低電位の電荷を高電位に  
持ち上げる仕事をする装置

起電力

図のような回路における電位を考える  
電荷は

- a  
↓ 起電力で仕事をされ高電位になる
- b  
↓ 抵抗で仕事し電位が下がる
- c  
↓ 抵抗で仕事し電位が下がる
- d  
↓
- a

電位



抵抗の両端( b-d )の電位差の和:  $IR_1 + IR_2 = V$

# キルヒ霍フの法則

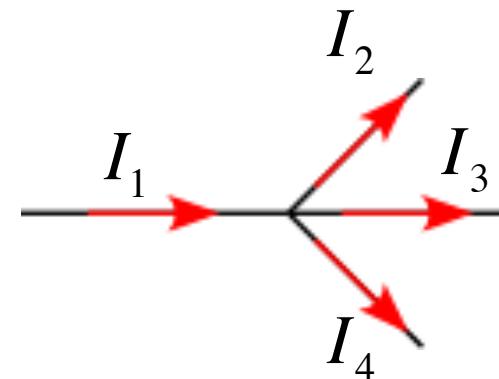
キルヒ霍フの第1法則 (電流の保存則)

回路の分岐点に流れ込む電流の代数和は0である

例

分岐点に  
流れこむ電流: 正  
流れだす電流: 負

$$0 = \sum_{i=1}^4 I_i$$



回路分岐点での電流

キルヒ霍フの第2法則 (オームの法則)

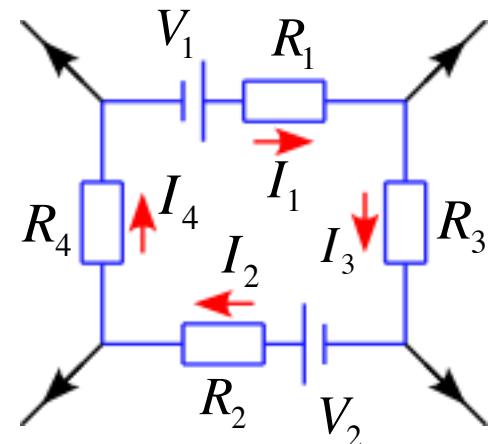
回路の一部を形成する閉回路にそって1周する経路で、  
起電力の総和は抵抗による電圧降下の総和に等しい

例

閉回路で時計回りに回路の向きを取ると

$$V_1 + V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4$$

任意の閉回路



# 電流と電荷の連続方程式

キルヒ霍フの第1法則 (電流の保存則)

電荷の保存則

ある領域に存在する電荷の総量が変化したならば  
その変化量はその領域を囲む面から電荷が出入りした量に他ならない

閉曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  の電荷密度  $\rho$  とする

この領域に含まれる電荷量は

$$Q = \int_V \rho dV$$

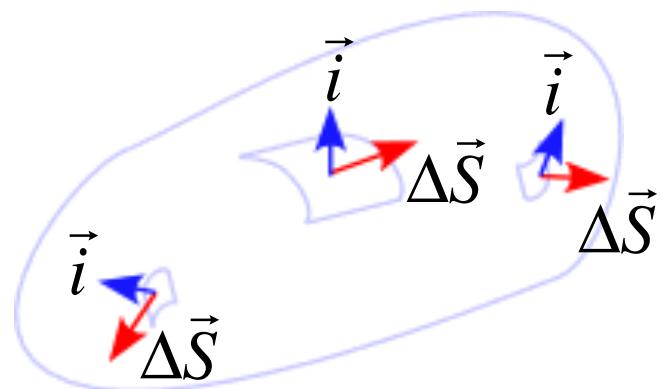
である

閉曲面  $S$  から出入りする電流密度を  $\vec{i}$  とすると

微小面積  $\Delta S$  を通過する電荷は  $\vec{i} \cdot \vec{\Delta S}$  である

従って、電荷量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$



# 電流と電荷の連続方程式

ガウスの積分定理により

$$\int_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{i} dV$$

であるから

$$\int_V \frac{d}{dt} \rho dV + \int_V \nabla \cdot \vec{i} dV = \int_V \left( \frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot \vec{i} \right) dV = 0$$

となる

この式は任意の閉曲面で成り立つので、空間の各点で

$$\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot \vec{i} = 0$$

電流と電荷の連続方程式

が成り立つ

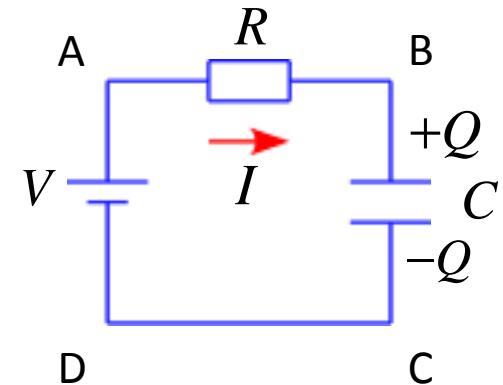
# 回路の方程式～RC回路

図の様な回路の電位を考えると

電池の起電力より:  $V_{D \rightarrow A} = V$

オームの法則より:  $V_{A \rightarrow B} = -RI$

コンデンサーに電気量  $Q$  が充電されている:



$$V_{B \rightarrow C} = -\frac{Q}{C}$$

従って、キルヒhoffの法則より

$$V_{D \rightarrow A} + V_{A \rightarrow B} + V_{B \rightarrow C} = 0$$

即ち、

$$V - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

式変形して

$$RI + \frac{Q}{C} = V$$

回路の方程式

# 回路の方程式～RC回路

ここで、コンデンサーについて着目してみる

コンデンサーでの電気量の充電は

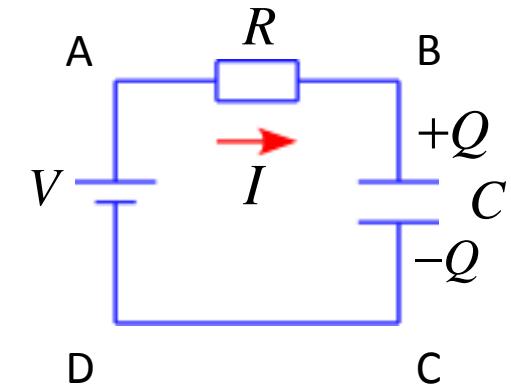
$$Q(t) = \int_0^t I(t') dt' + Q(0)$$

となる

この両辺を  $t$  で微分すると

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

電気量保存の式



コンデンサーに流れ込んだ電気量がそのまま蓄えられる

これを回路方程式に代入すると

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

$Q$  に関する微分方程式

となる

# 回路の方程式～RC回路

微分方程式の一般解は

$$Q(t) = CV - Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (A \text{ は定数})$$

と表せる

初期条件を  $t = 0$  でコンデンサーは充電されていなかったとする

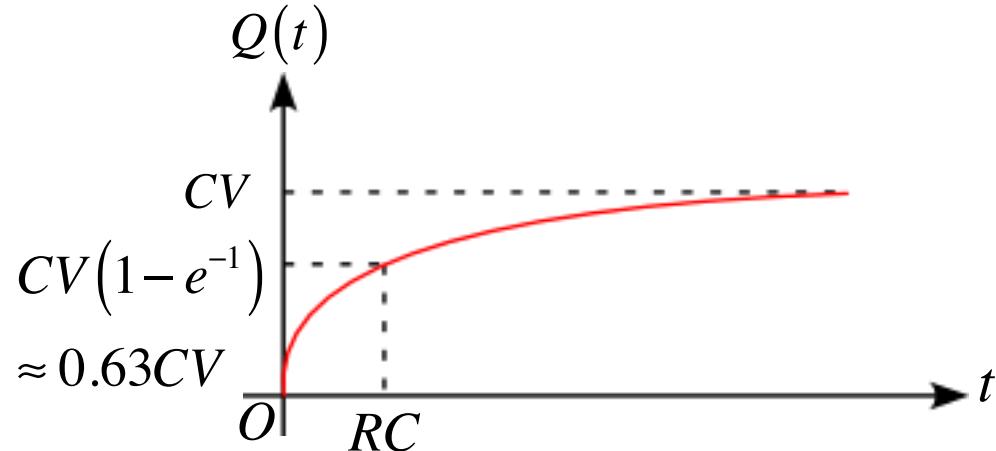
$$Q(0) = CV - Ae^{\frac{0}{RC}} = CV - Ae^0 = 0$$

よって、 $A = CV$  であるから

$$Q(t) = CV \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$RC$  : 回路の時定数

となる



# 回路の方程式～エネルギー保存則

回路の方程式  $RI + \frac{Q}{C} = V$  の両辺に電流  $I = \frac{dQ}{dt}$  をかけると

$$RI^2 + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} V$$

$$RI^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = \frac{dQ}{dt} V$$

抵抗で単位時間に  
消費されるジュール熱

コンデンサーの  
エネルギー

単位時間に  
電池がする仕事  
「仕事率」

コンデンサーの静電エネルギー

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

# ガウスの法則～ポイント

## ガウスの約束事

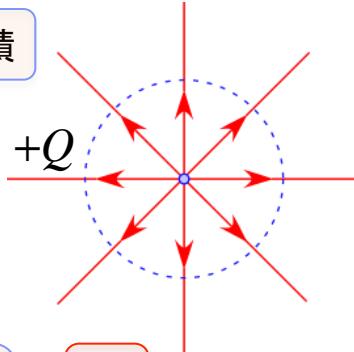
単位面積あたりの電気力線の本数を  $E$  [本] とする

$$\text{全電気力線数} = E \cdot S$$

単位面積当たりの本数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot S$$

全面積



例えば、半径  $r$  の球を閉曲面としたら

$$\text{全電気力線数} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

即ち、 $+Q$  の電荷から出てくる全電気力線数は  $Q/\epsilon_0$  [本] ある

ガウスの法則は

$$E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

一般化

と書ける

電場が求められる

## 注意点

・  $E$  は電場の大きさだが、面に垂直な成分

$$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n} = |\vec{E}| |\vec{n}| \cos \theta$$

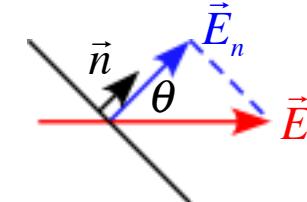
$$\int_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_n \cdot S$$

・ 電荷 (電気量) は点電荷でない場合は

$$\text{体積密度: } \rho \quad Q = \int_V \rho dV = \rho \cdot V$$

$$\text{面密度: } \sigma \quad Q = \int_S \sigma dS = \sigma \cdot S$$

$$\text{線密度: } \rho \quad Q = \int_l \rho dl = \sigma \cdot l$$



全電気力線数 =

$$\int_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Volume}} \rho dV$$

$$E_n \cdot S = \frac{1}{\epsilon_0} \times \text{全電気量}$$

# 導線を流れる電流～例題

半径1 [ mm ] の断面をもつ導線がある。

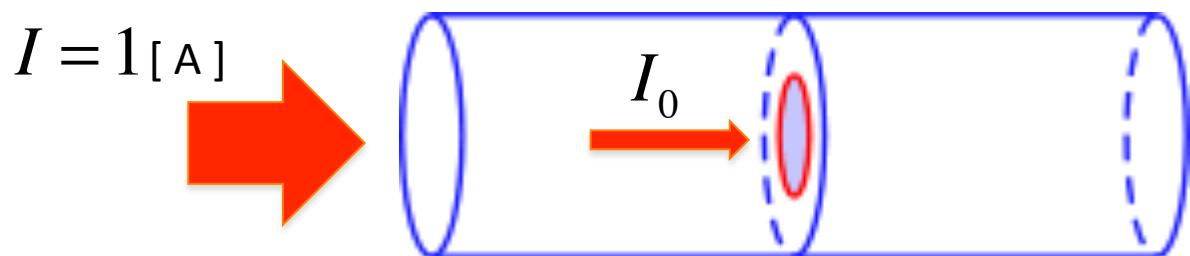
この導線に1 [ A ] の電流が流れている。

以下の間に答えよ。

但し、電流密度は一様として考えてよいものとする。

(1) 電流密度の大きさ  $i$  を求めよ。

(2) 導線の半径0.5 [ mm ] の内側で流れる電流の大きさ  $I_0$  を求めよ。



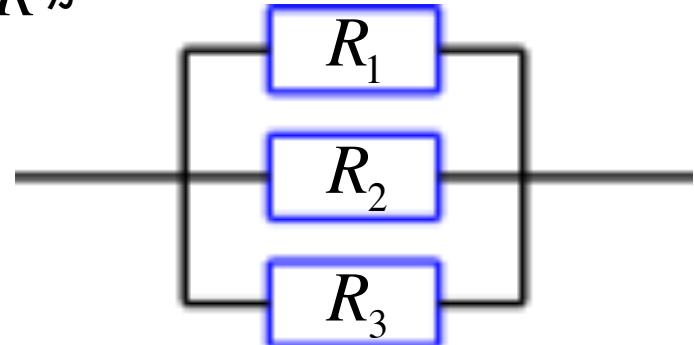
# 合成抵抗～例題

抵抗  $R_1, R_2, R_3$  がある。

(1) 3つの抵抗が並列につながれたときの合成抵抗  $R$  が

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

であることを示せ。



(2) 3つの抵抗が直列につながれたときの合成抵抗  $R$  が

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

であることを示せ。



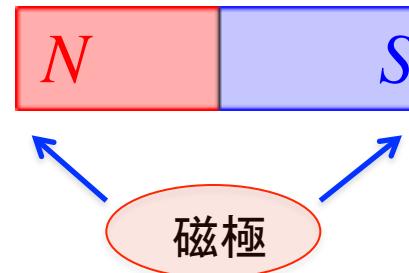
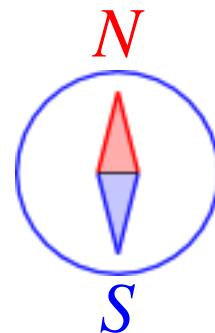
# 磁石と磁場

磁石：鉄を引きつける

最も強い部分を磁極

磁針

北を指す磁極を  $N$  極 (正極)  
南を指す磁極  $S$  極 (負極)



磁極の強さ

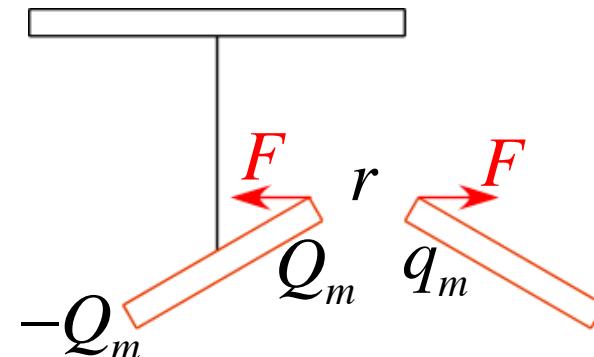
磁荷

磁極の間に働く力

$$F = k' \frac{Q_m q_m}{r^2}$$

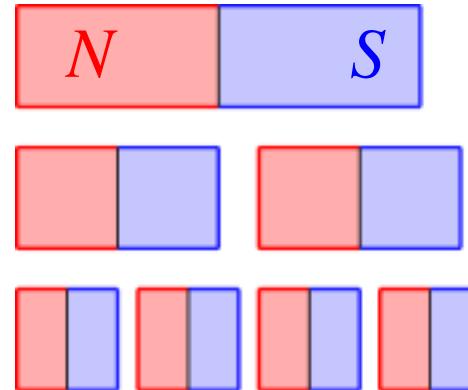
同符号の場合：斥力 (反発力)

異符号の場合：引力



# 磁石と磁場

電気の場合と異なり  
これまで単磁極は発見されていない  
2つに分けると必ず  
 $N$ 極と $S$ 極に分かれる



# 電流と磁場

磁場

磁石や電流によって空間の状態が変化している場

例

電流が流れている導線の近くに方位磁針を置くと針が振れる

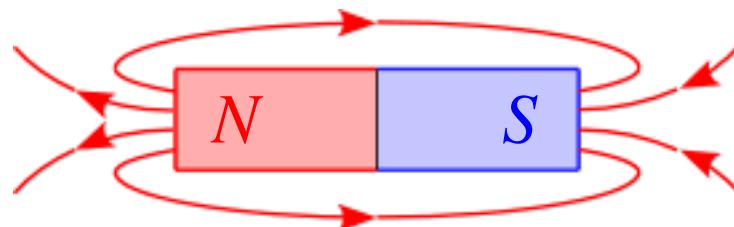
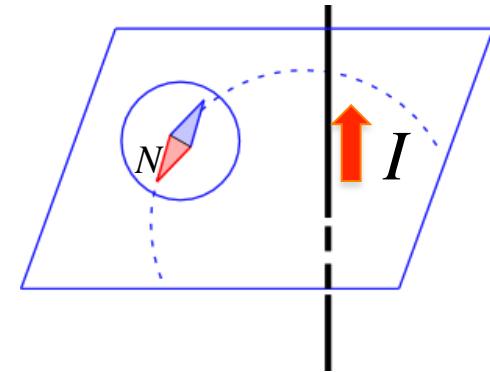
磁力線

磁力線の向きは磁場の向き

磁石のまわりの磁力線は、 $N$  極から出で  $S$  極に向かう

極から出入りする磁力線の本数は磁極の強さに比例する

単位面積当たりの磁力線の本数は、その点での磁場の強さに比例する

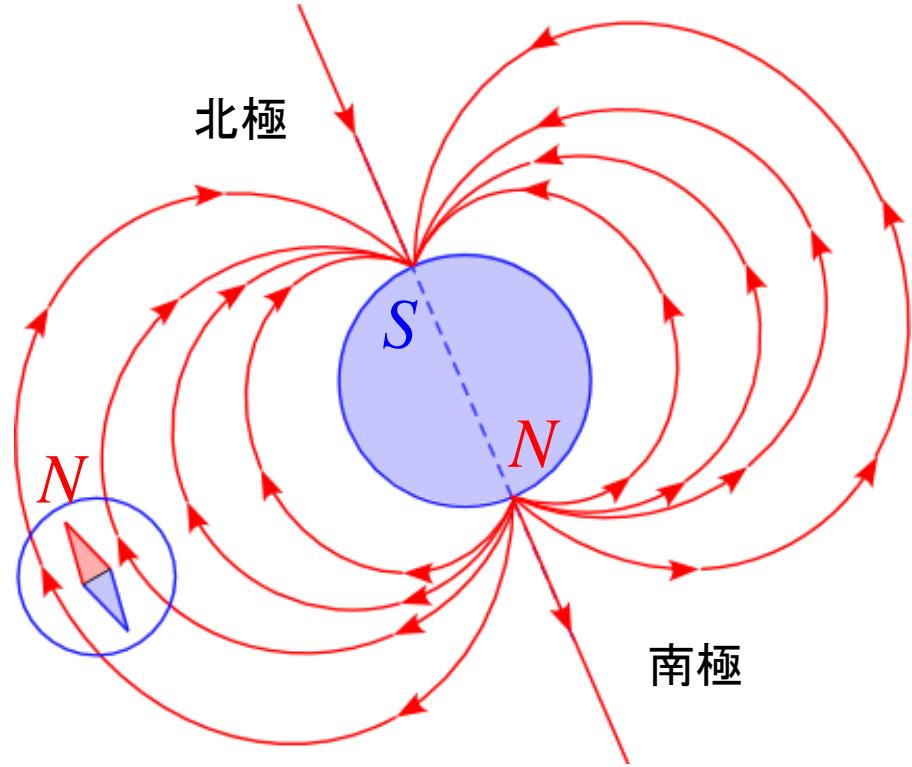


# 地球の磁場

磁針が南北を向く → 地球は大きな磁石

北を指す磁極を  $N$  極  
南を指す磁極  $S$  極

東京付近の地球の磁場  
約  $4.6 \times 10^{-5}$  [T]



磁力線  
 $N$  極から出て  $S$  極に向かう

# 磁場

磁場の強さの定義

2つの磁極を 1 [ m ] 話した場合、及ぼし合う力が

$$6.33 \times 10^4 \text{ [N]}$$

のとき 1 [ Wb ] (ウェーバ) とする

$N$  極が受ける力で磁場の強さを定義する

磁場の強さが  $H$  [ N / Wb ] の点に置かれた磁荷  $m$  [ Wb ] が受ける力  $F$  は

$$F = mH$$

と表せる

磁束密度 (磁場)

$$B = \mu_0 H$$

# アンペールの法則

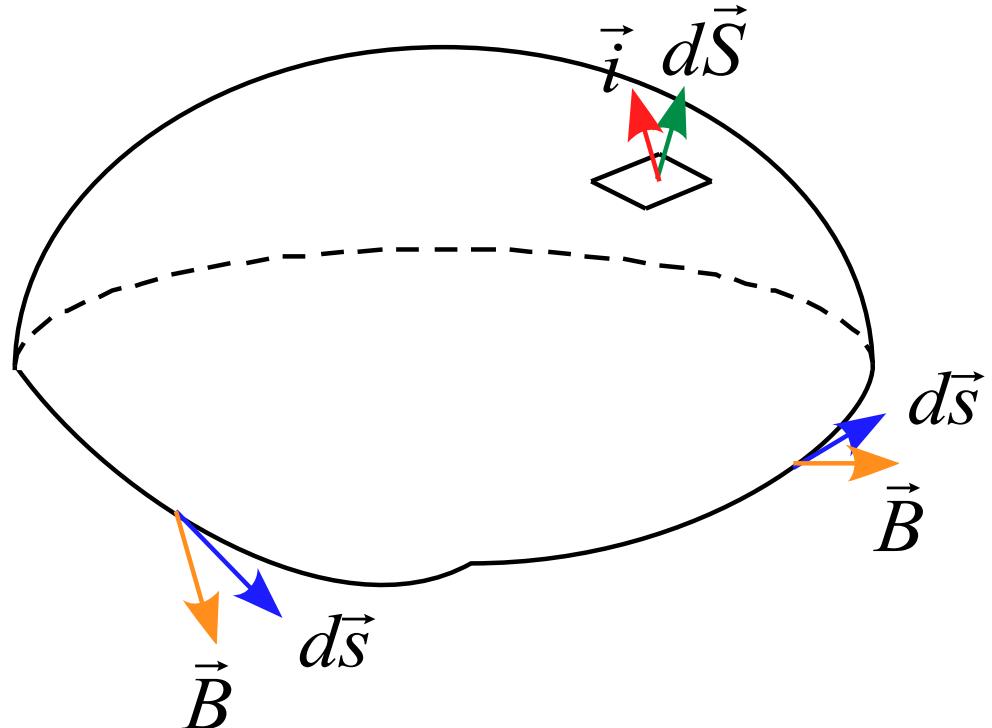
電荷が空間中を移動したとき磁場が発生する

電流が流れた

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$
$$= \mu_0 I$$

線上を1周  
線積分する

面を横切る  
電流の合計



# 電流がつくる磁場

直線電流がつくる磁場

磁力線は電流を中心とする同心円

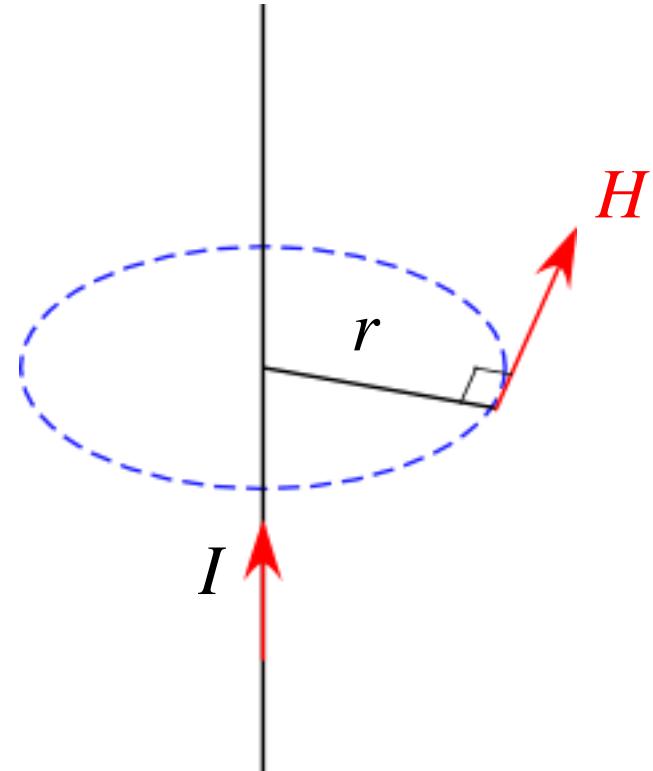
十分に長い直線導線が流れる電流  $I$  が  
つくる磁場の強さ  $H$  は

電流の大きさ  $I$  に比例

導線からの距離  $r$  に反比例

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad [\text{A/m}]$$

磁場の向きは「右ねじの法則」に従う



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

$$B \cdot 2\pi r$$

$$\mu_0 I$$

# 電流がつくる磁場

円形電流がつくる磁場

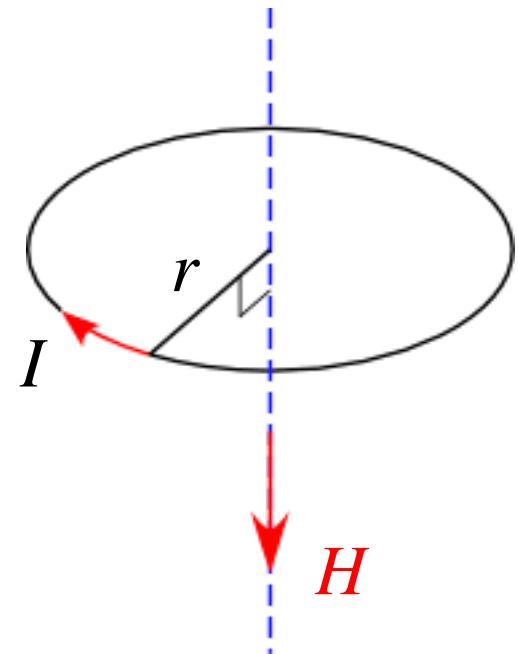
円形電流  $I$  が

中心部つくる磁場の強さ  $H$  は

電流の大きさ  $I$  に比例

半径  $r$  に反比例

$$H = \frac{I}{2r} \quad [\text{A/m}]$$



ビオ-サバールの法則

磁場の向きは「右ねじの法則」に従う

$$B = \int_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

# 電流がつくる磁場

ソレノイドコイルがつくる磁場

内部の中心付近に一様な磁場ができる

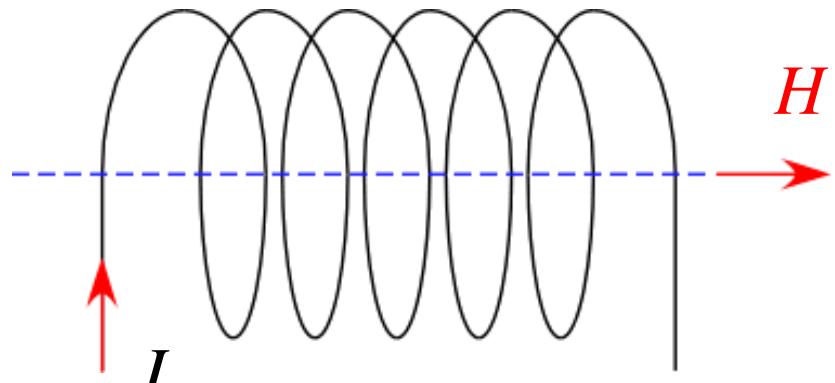
ソレノイドコイルに流れる電流  $I$  が  
つくる磁場の強さ  $H$  は

電流の大きさ  $I$  に比例

$$H = nI \quad [\text{A/m}]$$

単位長さ当たりの巻き数:  $n$

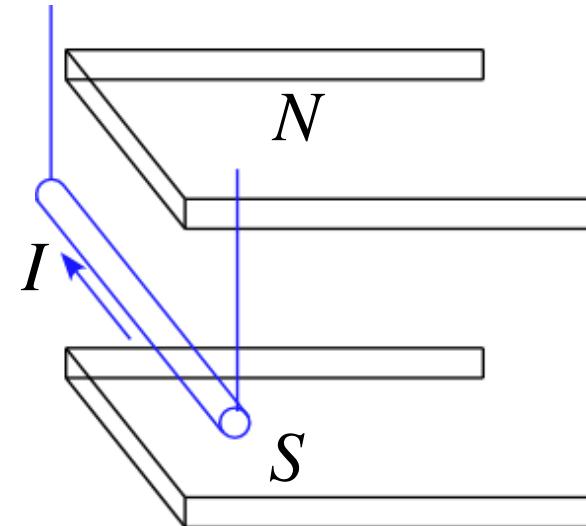
磁場の向きは「右ねじの法則」に従う



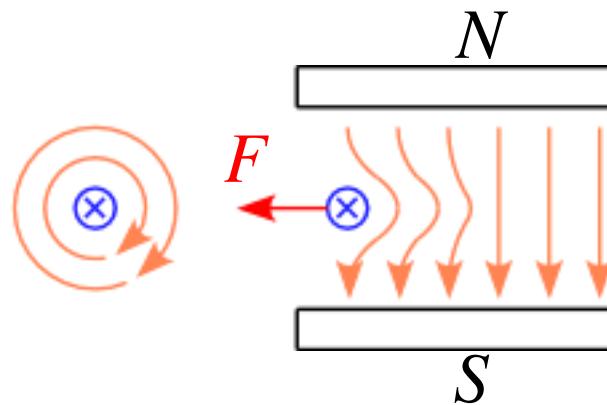
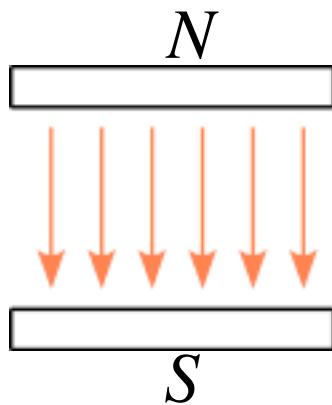
# 電流が磁場から受ける力

U字型磁石

磁石の間に導線をはさみ、  
電流を流すと導線は力を受ける



磁力線のひずみによるもの



この場合、導線は左向きの力を受ける

フレミング左手の法則

力

磁場

電流

# 電流が磁場から受ける力

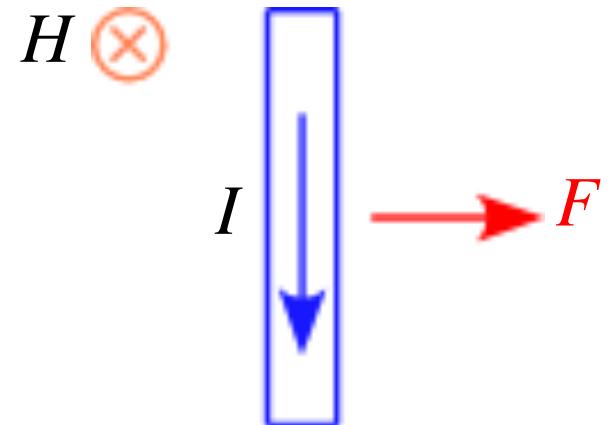
一様な磁場中 (磁場の強さ  $H$ )

磁場の向きと垂直に長さ  $l$  の導線を置き、電流  $I$  を流すと

$H, I, l$  に比例した力が働く

$$F = \mu_0 H I l$$

比例定数  $\mu_0$  : 真空透磁率



磁場の強さを表す量「磁束密度  $B$ 」を導入する

$$B = \mu_0 H$$

[ T ] (テスラ)

すると、電流が受ける力  $F$  は

$$F = I B l$$

と表すことができる

$$B = \frac{F}{I l}$$

磁束密度は 1 [ A ]、1 [ m ]当たりに働く力とみることもできる

# ローレンツ力

電場は静止電荷に力を及ぼす空間

静止した電荷  $q$  に働く力  $\vec{F}_E$  は

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

と表せる

磁場は動いている電荷に力を及ぼす空間

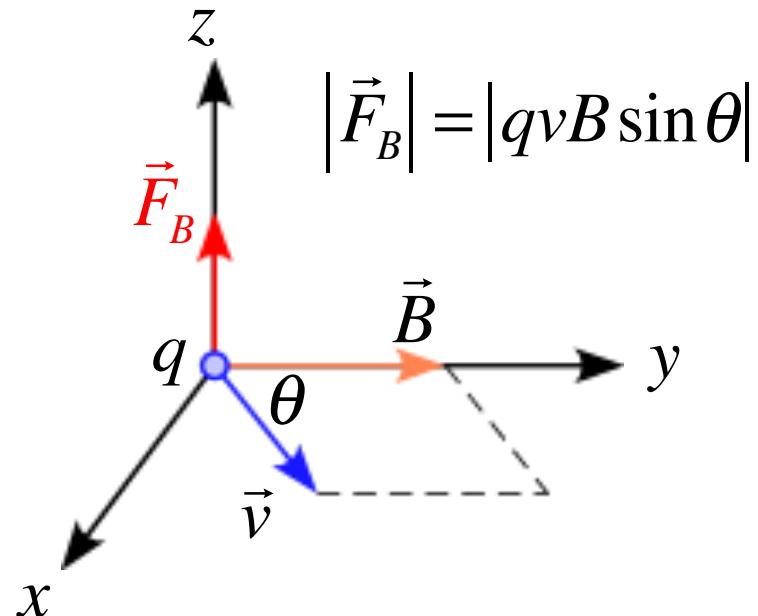
電荷を帯びている粒子が、電場  $\vec{E}$ 、磁束密度  $\vec{B}$  の中を速度  $\vec{v}$  で運動するときに受ける力  $\vec{F}$  は

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



ローレンツ力

と表される



$$|\vec{F}_B| = |qvB \sin \theta|$$

# 電磁気学の講義を終えて

## 取り扱った内容

- ・電荷とクーロンの法則
- ・電場 / 電位
- ・電気力線
- ・静電エネルギー
- ・ガウスの法則
- ・コンデンサー
- ・オームの法則
- ・キルヒ霍ッフの法則
- ・回路方程式
- ・磁場
- ・ローレンツ力

## 取り扱っていない内容

- ・導体 / 絶縁体
- ・電気双極子
- ・ビオ・サバールの法則
- ・アンペールの法則
- ・電磁誘導
- ・電磁波