講義ノート

2015年度
教養の物理
補充授業

2015 補充授業

まず、高校で物理を履修した人は、高校の時に覚えたであろう公式を一旦捨てる。

高校物理の段階では
数学の準備が足らないので
本質を伴わない変な公式が多い

物理は自然現象を数式で表す

～しかもできるだけ少ない式で表したい

例えば

力学

$$\boxed{ma = F}$$

運動方程式

$$\boxed{\frac{d}{dt}(mv) = F}$$

ニュートンが
最初に提唱した形

電磁気学

$$\int_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \left(\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

Maxwellの方程式

そもそも、君たちは勘違いをしている。

答えを覚えて、テストで書くだけはナンセンス、意味がない。

まず、何か式を書いたら

例えば

$$ma = F$$ とか

$$ma = -mg$$ とか

式を書いた時に、何でそう書けるのか？　自問自答する

・それぞれの項が何を意味しているか？
・＝ (イコール) はなぜ結べるのか？

式は自然界を表す表現の一つであるから意味がある

大切なことはその**式の意味を理解する**。

数学(微積・ベクトル)　は道具にすぎない

道具が使えなければ困るが、道具にこだわりすぎるのも良くない

物理は公式がいっぱい？

物理において、所謂「公式」と呼ばれるものは

・定義式　・・・先人達が決めた物理を理解する上で役に立つルール

・物理法則　・・・　物理学の中で提唱されている法則
観測や理論から導き出された自然界の法則

に分けられます。

例えば

定義式

$\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$ **速度**

$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$ **加速度**

$\mu = \frac{f_s}{N}$ **摩擦係数**

法則

$\boxed{ma = F}$ **運動方程式**

$f_g = mg$ **重力**

$f_i = -m\alpha$ **慣性力**

$f_r = kx$ **フックの法則**

力学

・高校の時に覚えた公式は一旦忘れる。

場合分けされた公式は
覚えると害が出る

自由落下
鉛直投げ上げ
水平投射
斜方投射
斜面を滑る
・・・などなど

新しく使える道具

速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

（定義式）

力学＝運動を表す

力が作用

$$ma = F$$

（運動方程式）

(ニュートンが見つけた法則)

次元解析

[L] と [M] と [T]
長さ　質量　時間

を使って、それぞれの物理量を表すこと

・その物理量の構成がわかる
・その物理量の単位がわかる

運動方程式は万能だ！

$$ma = F$$

質量と加速度をかけたものが
その物体に作用する力の合計である

$$ma = F \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺に速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{運動エネルギー}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{Fx}_{\text{仕事}}\right)$$

次元解析

$$\underbrace{[M]}_{\text{質量}}\underbrace{\frac{[L]}{[T^2]}}_{\text{加速度}} = \underbrace{\frac{[ML]}{[T^2]}}_{\text{力}}$$

この式変形は、「知っている」で使って良いが、間違っていないか確認をすること

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = \frac{1}{2}m\cdot 2v\cdot v'$$

$$= m\cdot v\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

ニュートンが最初に提唱した形

運動量

次元解析

$$\underbrace{[M]}_{\text{質量}}\underbrace{\frac{[L]}{[T]}}_{\text{速度}} = \underbrace{\frac{[ML]}{[T]}}_{\text{運動量}}$$

式の意味

運動量の時間変化 ＝ 作用する力

・運動量が変化すれば、力が作用したはずである。
・力が作用すれば、運動量が変化する。

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = Fdt$$

力積

次元解析

$$\underbrace{\left[\frac{ML}{T^2}\right]}_{\text{力}}\underbrace{[T]}_{\text{時間}} = \underbrace{\frac{[ML]}{[T]}}_{\text{力積}}$$

1. (期末)

運動方程式 $\boxed{ma = F}$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺を x で積分する

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int Fdx$$

$$\int\left(m\frac{dv}{dt}v\right)dt = \int Fdx$$

$$\int\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2}\right)dt = \int Fdx$$

運動エネルギー

(　)の中に m を入れる

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = Fdt$$

運動量

2. (期末)

$$v = 5 + 2t + 9t^2$$

$$x(2) = 40$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5 + 2t + 9t^2\right) = 2 + 18t$$

$t = t_1$ の時なので、

$$a(t_1) = 2 + 18t_1 \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = v \qquad x = \int v dt$$

x は t で微分されている ⇒ t で積分すれば x が求まる

$$\boxed{\int \quad dt}$$

具体的には

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int v dt$$

$$\int dx = \int v dt$$

$$x = \int v dt$$

$$x = \int \left(5 + 2t + 9t^2\right) dt$$

$$x = 5t + 2t^2 \cdot \frac{1}{2} + 9t^3 \cdot \frac{1}{3} + C$$

$$x = 5t + t^2 + 3t^3 + C$$

積分定数は初期条件が決める

$$x(2) = 40$$

$$x(2) = 5 \cdot 2 + 2^2 + 3 \cdot 2^3 + C = 40$$

$$C = 2$$

$$x(t) = 5t + t^2 + 3t^3 + 2 \quad [\,\mathrm{m}\,]$$

単位が記述されている問題では
必ず単位まで記述する

力学のモデルの考え方

運動方程式を立てる

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

速度、変位を求める

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

加速度

t で積分

$v = \bigcirc$

速度

t で積分

$x = \bigcirc$

変位

積分定数は初期条件が決める

求めた速度、変位を使って
問題で問われている量を計算する

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad W = Fx$$

$$U = mgx$$

など

運動方程式を立てる手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

・問題文で指定されている場合はそれを利用する
・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
・一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

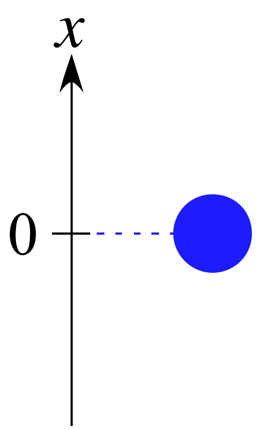
③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の　の部分を書き込む

10. (期末)　自由落下



・作図は丁寧に！

問題で軸の設定はどうなっているか？

問題で設定されていなければ、
自分の都合が良いように設定する

この問題では、上向きが正に
軸が設定されている

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg$$

注）向き、正負が重要！

この運動方程式からエネルギー保存則を導く

テクニックが必要

$$a = \frac{dv}{dt}$$ と書き換える

$$v = \frac{dx}{dt}$$ を両辺にかける

$$ma = -mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}(-mgx)$$

この式変形は、「知っている」で使って良いが、間違っていないか確認をすること

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = \frac{1}{2}m\cdot 2v\cdot v' = m\cdot v\cdot\frac{dv}{dt}$$

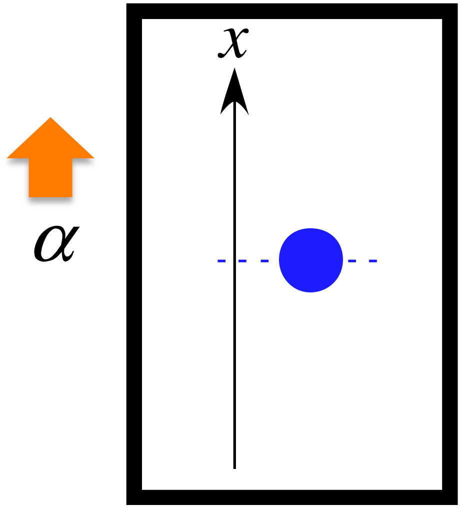
$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}_{\text{力学的エネルギー}}\right) = 0$$

( ) の中を t で微分したらゼロ

( ) の中は t に対して定数であるはず

力学的エネルギーが時間変化しないので保存している

3. (中テスト)　(1) エレベータ内



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力 ・・・ mg

・接触力 ・・・ 無し

・慣性力 ・・・ $m\alpha$

慣性力は進行方向と逆向きに

(エレベータ)

運動する物体の質量 × 動いている座標の加速度

m　　α

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (上向き正)

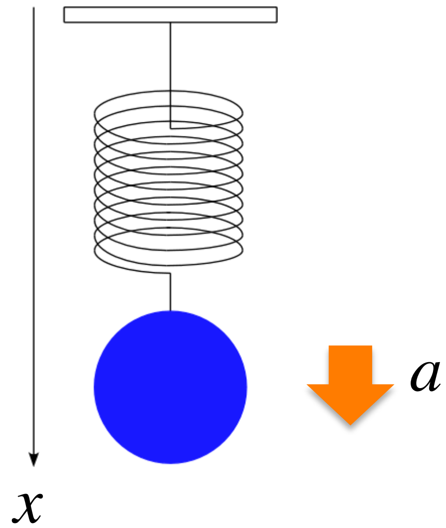
1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg - m\alpha$$

注) 向き、正負が重要！

3. (中テスト) (2) 吊るしたバネ



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力 ・・・ mg

・接触力 ・・・ kx

・慣性力 ・・・ 無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (下向き正)

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

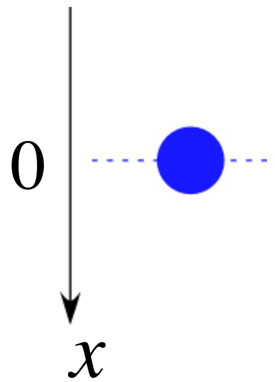
2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = mg - kx$$

注) 向き、正負が重要！

11. (期末)　中テスト　3(4)　雨滴の落下

・作図は丁寧に！



1. 図に作用する力を書き込む

・場の力 ・・・ mg

・接触力 ・・・ kv（空気抵抗力）

・慣性力 ・・・ 無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている（下向き正）

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = mg - kv$$

注）向き、正負が重要！

この式から $v(t), x(t)$ を求めることになる

式変形すると

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

(この微分方程式の解き方は数学の授業で)

この微分方程式を解くと

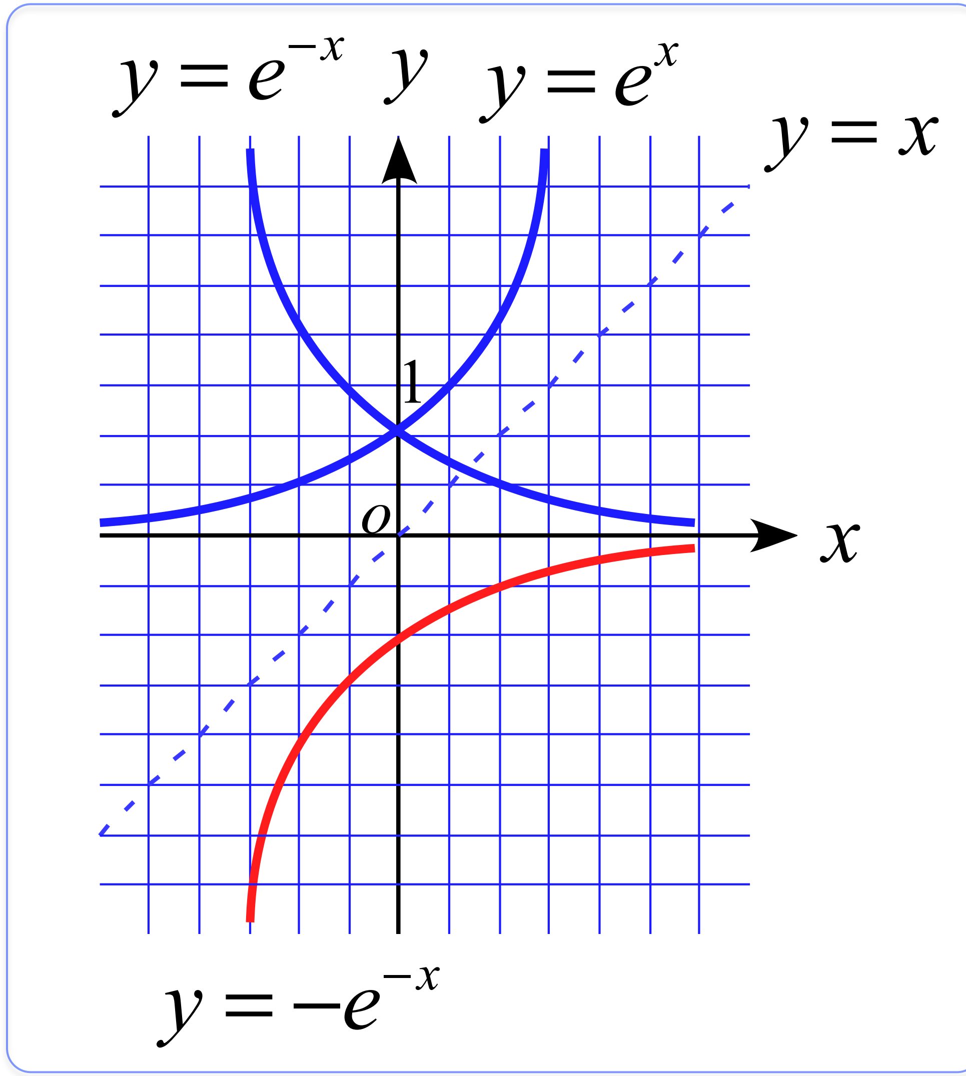
$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

この式を見てみると

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

ざっくりみると $-\frac{1}{e^t}$ のグラフ

であることがわかる



$t=0$ のとき

$$v(0)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}\right)=\frac{mg}{k}(1-1)=0$$

$t=\infty$ のとき

$$v(\infty)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot\infty}\right)=\frac{mg}{k}(1-0)=\frac{mg}{k}$$

グラフを書く時のpoint

- 始点　$t=0$
- 終点　$t=\infty$
- 概形
- 特殊な点

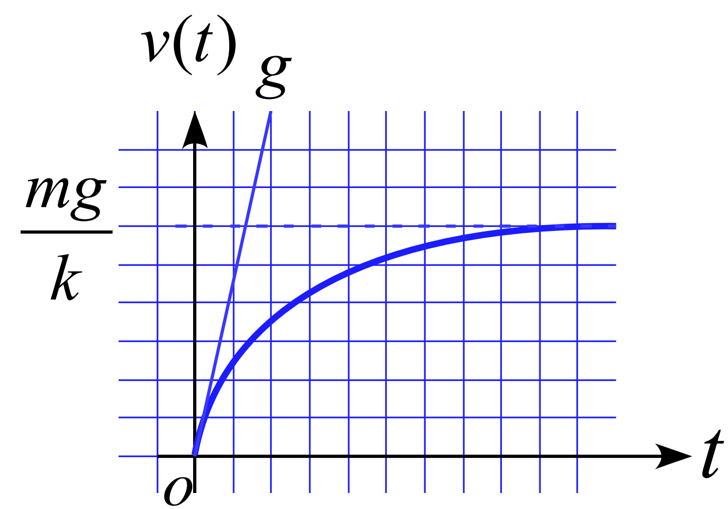
$t=0$ のときの傾きは

$$\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

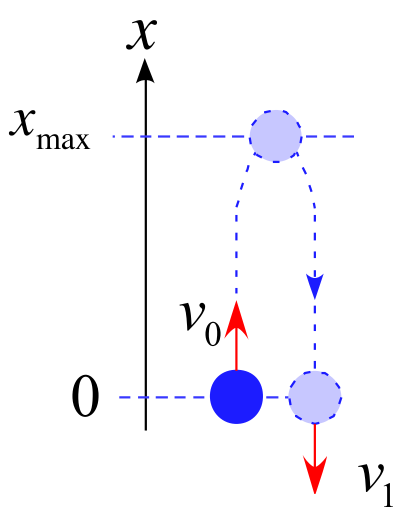
$$=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

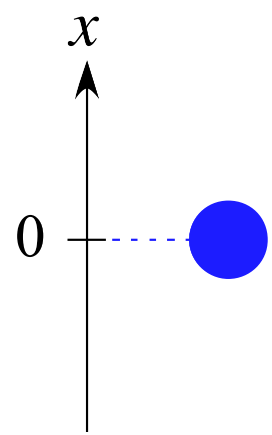
$$\frac{d}{dt}v(0)=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)\cdot 1$$

$$=g$$



12. (期末)　鉛直投げ上げ





・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む
2. 軸の設定を確認する
3. 初期条件を書き出す

$v(0) = v_0$（上向き正）

$x(0) = 0$

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg$$

注）向き、正負が重要！

この式から $v(t), x(t)$ を求める

$$ma = -mg$$

$$a = -g$$

g は一定だから加速度が一定であり
等加速度運動である

しかし、等加速度運動の公式は忘れた

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} = -g$$

t で積分

$$v = -gt + C$$

積分定数を
忘れない

積分定数は初期条件が決める

$$v(0) = -g \cdot 0 + C = v_0$$

$$C = v_0$$

$$v(t) = -gt + v_0$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} = -gt + v_0$$

t で積分

$$x = -gt^2 \cdot \frac{1}{2} + v_0 t + C'$$

積分定数を
忘れない

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C'$$

$$x(0) = -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C' = 0$$

$$C' = 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

最高点 ⇨ $v=0$ となる点

$$\boxed{v(t_{\max})=0}$$

$$v(t_{\max})=-gt_{\max}+v_0=0$$

$$t_{\max}=\frac{v_0}{g}$$

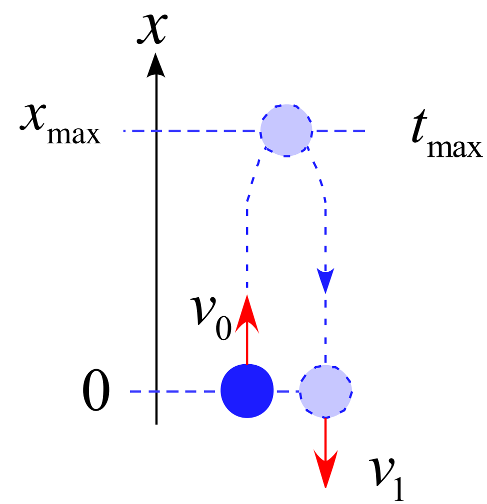
その時の位置は

$$x_{\max}=x\left(t_{\max}\right)=-\frac{1}{2}gt_{\max}^2+v_0t_{\max}$$

$$=-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+v_0\frac{v_0}{g}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}+\frac{v_0^2}{g}$$

$$=\frac{v_0^2}{2g}$$



再び戻って来た ➡ $x=0$ に来た

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

この式の $x=0$ になる t を求める

$$x(t) = t\underbrace{\left(-\frac{1}{2}gt + v_0\right)}_{\text{戻って来た時}}$$

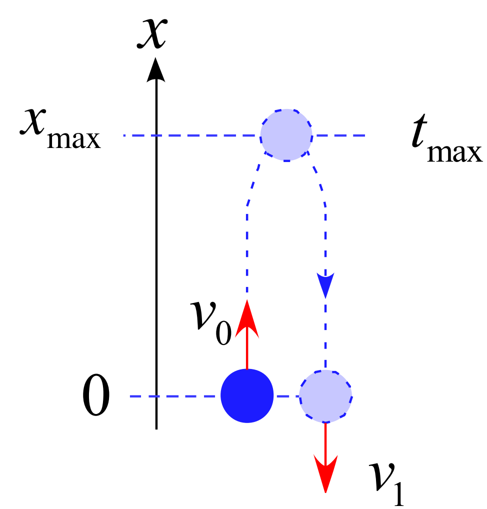
原点　戻って来た時

戻って来た時の時刻は

$$-\frac{1}{2}gt + v_0 = 0$$

$$t = \frac{2v_0}{g}$$

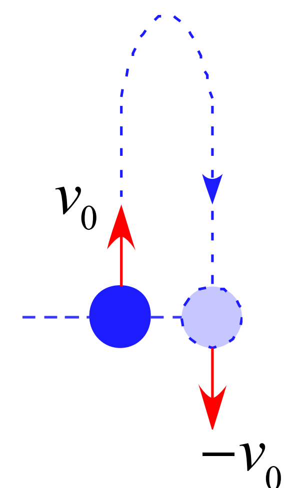
この時刻の速度を求めればよい



$$v = -g\frac{2v_0}{g} + v_0$$

$$= -2v_0 + v_0$$

$$= -v_0$$



これは何を意味するか？

鉛直に v_0 で投げ上げると、

ちょうどスタート地点にも戻って来た時の

速度は大きさが同じで逆向きになる

力学的エネルギー　$E(t) = K(t) + U(t)$

運動エネルギー　$K(t) = \frac{1}{2}mv^2$

位置エネルギー　$U(t) = mgx$

それぞれ計算すると

$$K(t) = \frac{1}{2}m\left(-gt + v_0\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(g^2t^2 + v_0^2 - 2gtv_0\right)$$

$$= \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 2gtv_0$$

$$= \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0t$$

$$U(t) = mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0t\right)$$

$$= -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$$

力学的エネルギー $E(t)=K(t)+U(t)$ であるから

$$E(t)=K(t)+U(t)$$

$$=\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_0^2-mgv_0t-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0t$$

$$=\frac{1}{2}mv_0^2$$

m, v_0 は定数なので $E(t)$ は定数である。

従って力学的エネルギーは時間に依らず一定である。

力学的エネルギー $E(t)=K(t)+U(t)=\frac{1}{2}mv_0^2$

運動エネルギー $K(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_0^2-mgv_0t$

位置エネルギー $U(t)=-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0t$

それぞれをグラフにする

まずはザックリ見てみよう

$E(t)=\frac{1}{2}mv_0^2$ 一定

$K(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_0^2-mgv_0t$

2次関数 

$t=0$ で $K=\frac{1}{2}mv_0^2$

$U(t)=-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0t$

2次関数 

$t=0$ で $U=0$

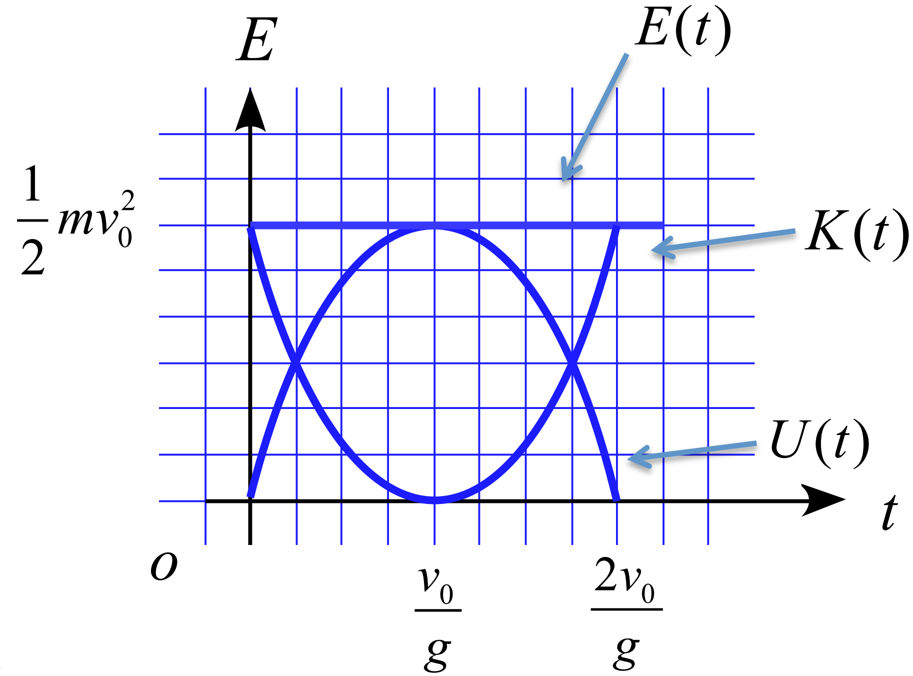
グラフを書く時のpoint

- 始点 $t=0$
- 終点 $t=\infty$
- 概形
- 特殊な点

Start地点 ($t=0$) では

$$v(0)=v_0 \qquad K=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$U=0$$



最高点では

$$v(t_{\max})=0 \qquad K=0$$

$$t_{\max}=\frac{v_0}{g} \qquad U(t)=-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0t$$

$$=-\frac{1}{2}mg^2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+mgv_0\frac{v_0}{g}=\frac{1}{2}mv_0^2$$

戻ったときは

$$v(t_{RE})=-v_0 \qquad K=\frac{1}{2}m(-v_0)^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$t_{RE}=\frac{2v_0}{g} \qquad U=0$$

これらの情報だけで
グラフは書くことができる

数学的にみると

$$K(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_0^2-mgv_0t$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left(t^2-\frac{2v_0}{g}t\right)+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t^2-\frac{2v_0}{g}t+\frac{v_0^2}{g^2}\right)-\frac{v_0^2}{g^2}\right\}+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2-\frac{v_0^2}{g^2}\right\}+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2-\frac{1}{2}mg^2\frac{v_0^2}{g^2}+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2$$

頂点 $\left(\frac{v_0}{g}, 0\right)$ $t=0$ で $K=\frac{1}{2}mv_0^2$

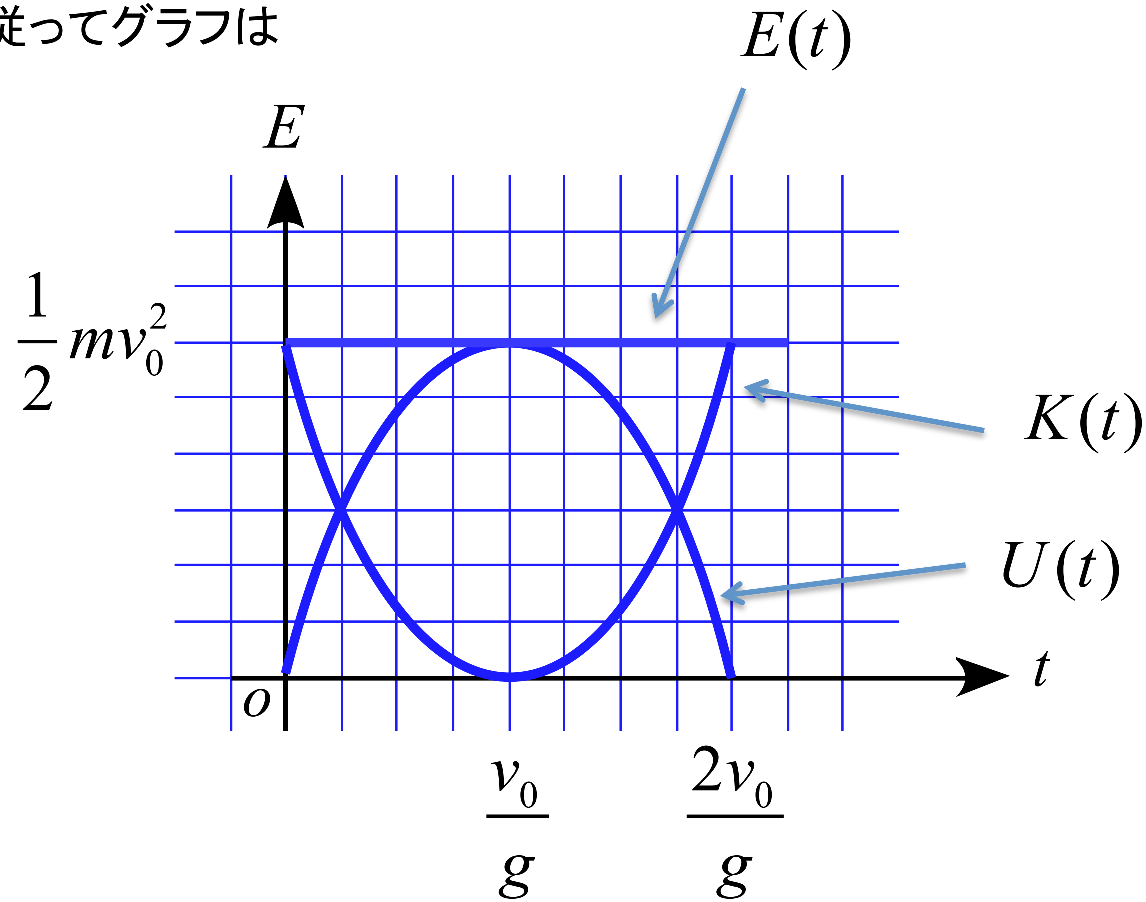
$$
\begin{aligned}
U(t) &= -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t\right) \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{v_0^2}{g^2}\right) - \frac{v_0^2}{g^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{v_0^2}{g^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}mg^2\frac{v_0^2}{g^2} \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2
\end{aligned}
$$

頂点 $\left(\frac{v_0}{g}, \frac{1}{2}mv_0\right)$

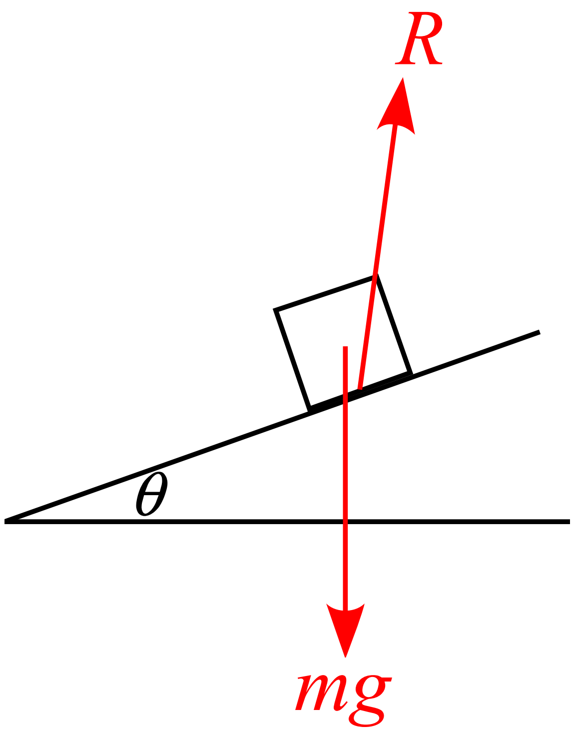
$t=0$ で

$$U(0)=-\frac{1}{2}mg^2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{1}{2}mv_0^2=0$$

従ってグラフは



斜面を滑る物体の作図について



物体に作用する力は

重力: mg

接触面から受ける抗力　: R

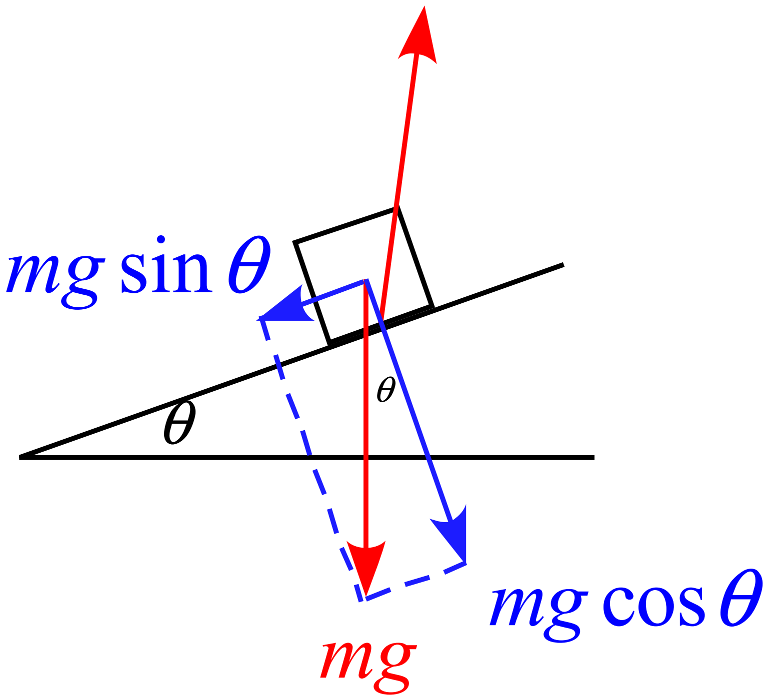
の2つとなります。

このままの状態では考え難いので、

斜面に水平な方向
斜面に垂直な方向

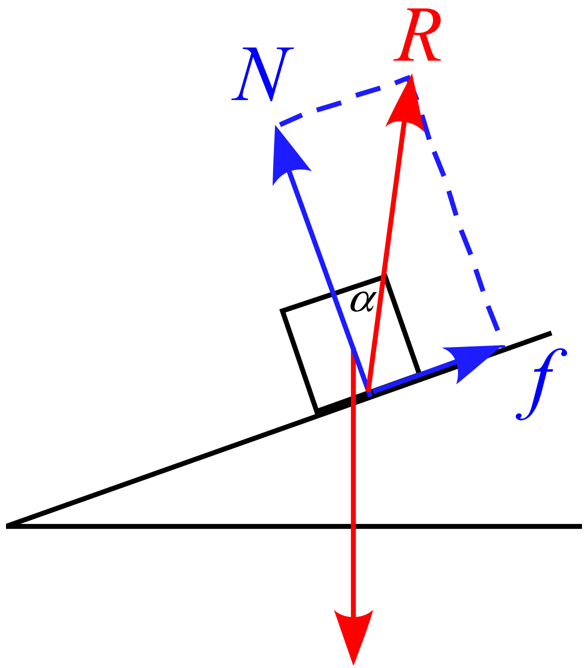
の2つの軸を取ります

重力 mg を軸に沿って分解すると



斜面の角度 θ から
mg を分解します

抗力 Rを軸に沿って分解すると

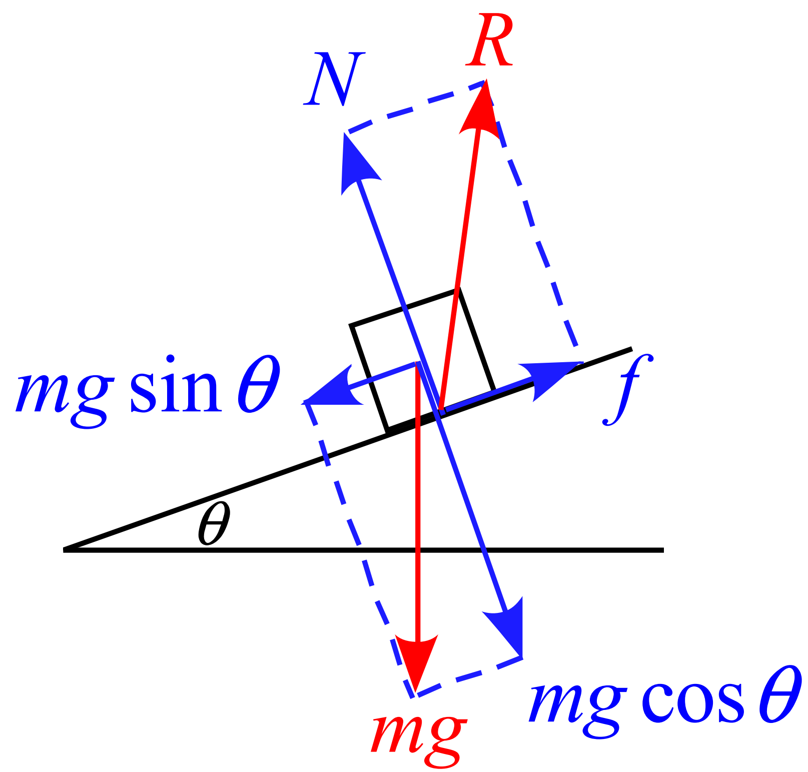


接触面から受ける抗力は

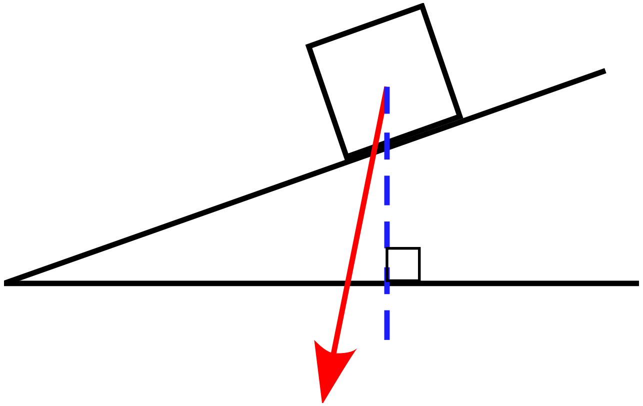
面に垂直な成分: N

面に平行な成分: f

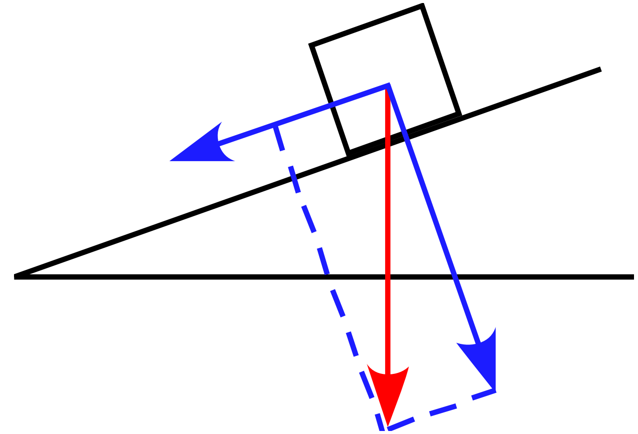
の2つとなります。



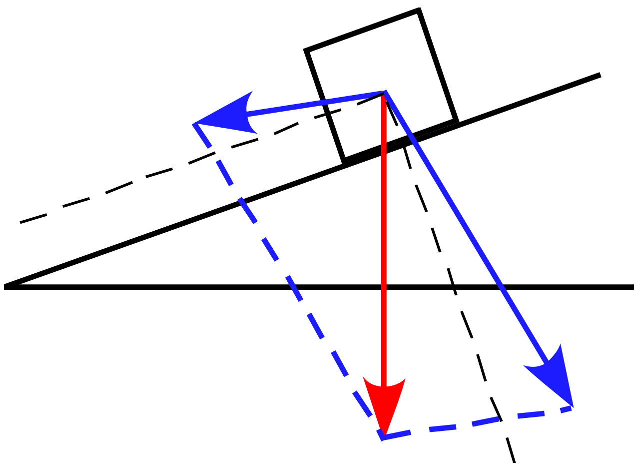
間違った答案例



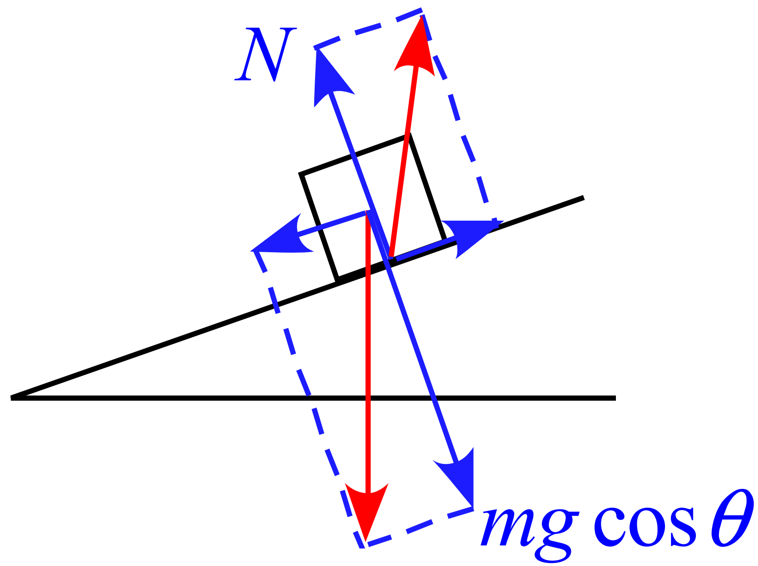
× 重力が真下からずれている



× 分解した成分が長方形からはみ出ている



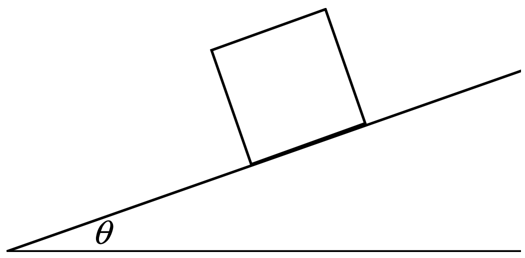
× 長方形ではなくて平行四辺形になっている
分解した成分が軸に沿っていない



× 垂直抗力 N と $mg\cos\theta$ の
矢印の長さが明らかに違う

13. (期末) 中テスト 3(3) 斜面を滑り降りる物体

・作図は丁寧に！



1. 図に作用する力を書き込む
2. 軸の設定を確認する

運動の方向に合わせたほうが都合が良い

斜面に平行に
斜面に垂直に

軸と違う方向を向いている力は
分解して軸にそろえる

3. 初期条件を書き出す

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

軸ごとに運動方程式を立てる

$$ma_x = mg\sin\theta - f$$

$$ma_y = N - mg\cos\theta$$

注)向き、正負が重要！

次にそれぞれの条件を適用する

$$f = \mu_k N \quad \Rightarrow \quad ma_x = mg\sin\theta - \mu_k N$$

斜面から飛び出ない $\Rightarrow$ $a_y = 0$

$$m \cdot 0 = N - mg\cos\theta$$

$$N = mg\cos\theta$$

$$ma_x = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

問題文で使用されている文字に合わせると

$$ma = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

となる

等加速度運動を示す ⇒ $a = \bigcirc$ ← これが時間に依らないことを示せばよい

$$a = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$$

g, μ_k, θ は定数なので a_x は時間に依らず一定である。

従って、この運動は等加速度運動である。

摩擦力がした仕事

運動方程式を見ると

$$ma = mg\sin\theta \underbrace{- \mu_k mg\cos\theta}_{\text{摩擦力}}$$

従って、距離 L 移動した時の仕事は

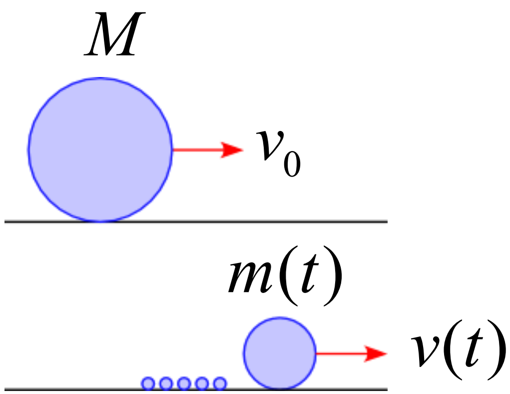
$$W = Fx = -\mu_k mg\cos\theta \cdot L$$

となる

補足　運動量保存則　- 問題集　例題18

最初の状態

t 後の状態



何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(mv\right) = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(mv\right) = 0$$

進行方向軸に
作用している力は無し

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・重力　mg
・垂直抗力　N

これらの力は
進行方向には作用していない

2. 軸の設定を確認する

普通は進行方向を正にする

なぜ m を ( ) の中に入れるか？

m も t で変化するから

つまり、mv が時間的変化していない

運動量が保存している

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{運動量}\\ \text{Start 時}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{運動量}\\ \text{t 秒後}\end{array}}$$

単位時間あたり m_0 減る

t秒後　$m_0 \times t$ 減る

$$m(t) = M - m_0 t$$

Start時　M　　速度 v_0

t秒後　$M - m_0 t$　　速度 $v(t)$

$$Mv_0 = m(t)v(t)$$

$$Mv_0 = \left(M - m_0 t\right)v(t)$$

$$v(t) = \frac{M}{M - m_0 t} v_0$$

（≥ 1 速くなった）

$\boxed{v = \dfrac{dx}{dt}}$ を使う

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{M}{M - m_0 t} v_0$$

t で積分

$$v(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{M}{M - m_0 t} v_0 dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{Mv_0}{M - m_0 t} dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{Mv_0}{M - m_0 t} dt$$

$$x(t) = Mv_0 \int_0^t \frac{1}{M - m_0 t} dt$$

$$= Mv_0 \frac{1}{-m_0} \Big[\log\big(M - m_0 t \big) \Big]_0^t$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0} \Big\{ \log\big(M - m_0 t \big) - \log M \Big\}$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0} \log \frac{M - m_0 t}{M}$$

電磁気学

・理解したいポイント

- ・クーロン力
- ・ガウスの法則
- ・回路方程式

クーロン力

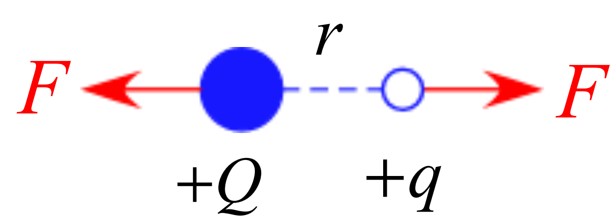
大きさ

$$|F| = \left| k\frac{Qq}{r^2} \right|$$

向きは

同符号・・・斥力
異符号・・・引力

（2点を結ぶ直線上）



電場 ・・・ 1[C]当たりの力

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

クーロン力の周辺の関係について

クーロン力

$$F = k\frac{Qq}{r^2}$$

$$\times\frac{1}{q}$$

電場　**1[C]あたりの力**

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

仕事

仕事

静電エネルギー

$$U = k\frac{Qq}{r}$$

$$\times\frac{1}{q}$$

電位　**1[C]あたりの静電エネルギー**

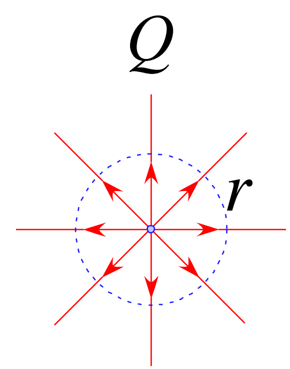
$$V = k\frac{Q}{r}$$

ガウスの法則

Maxwell の方程式

$$\int_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

$$N = \boxed{E_n S = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$



ガウスは目に見えない電気力線を本数で表した

$$N = E_n \cdot S$$

全本数　　電場×面積

電気力線は電荷によって出る本数が決まっている

（電気量）

$$N = E_n S$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

前の式と合わせると電気量 Q から出る電気力線の本数は

$$N = \boxed{E_n S = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \quad [\text{本}]$$

ガウスの法則

この関係式が何に使えるか？

⇒ 電場が求められる

回路方程式

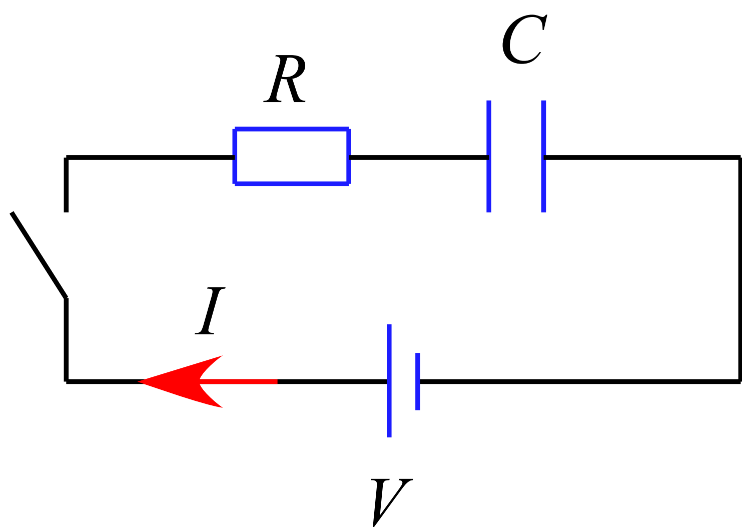
閉回路ひと回りについて電圧の変化に関する式

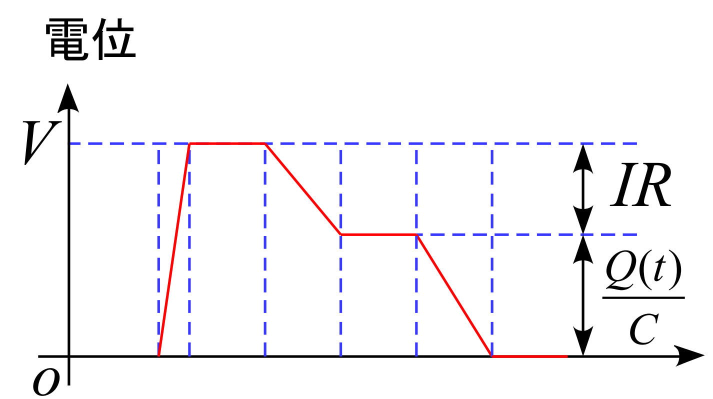
・電池 ･･･ V （起電力） 電圧を上げる

・抵抗 ･･･ $V = IR$ （オームの法則）

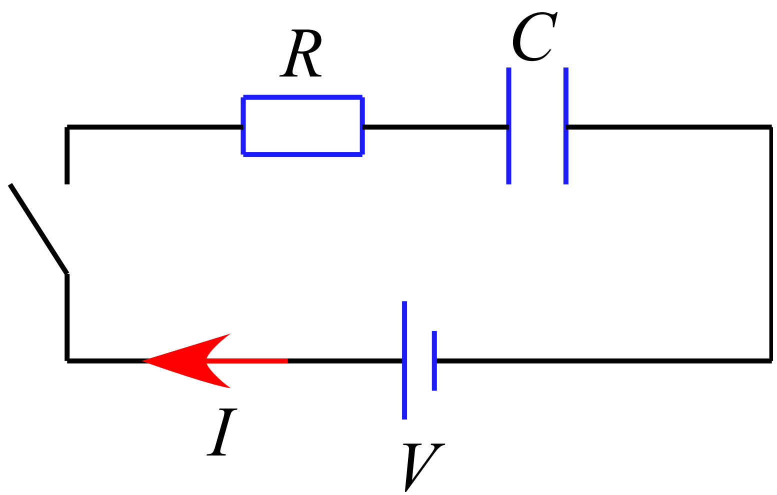
・コンデンサー ･･･ $Q = CV$ ⇨ $V = \dfrac{Q}{C}$

電圧を下げる

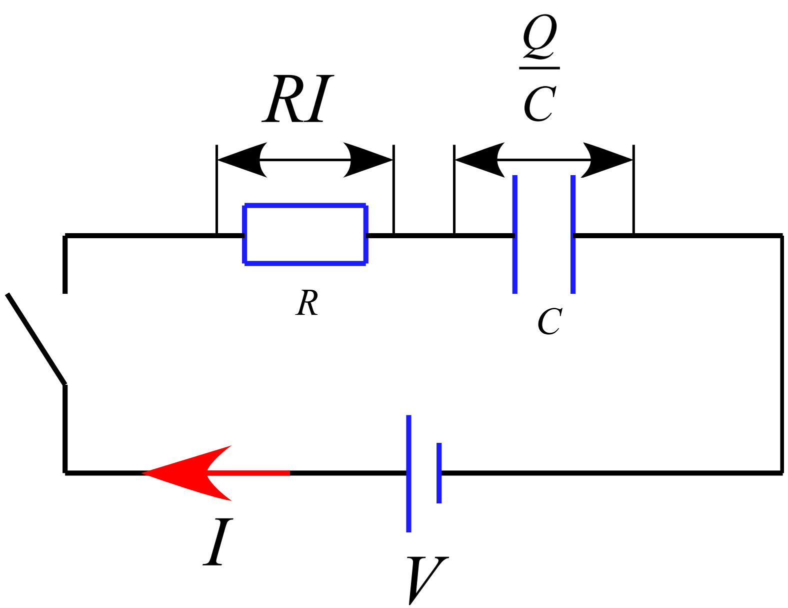




14. 期末



$$t=0 \text{ で } Q=\frac{3}{2}CV$$



1. 電位差を書き込む
2. 回路1周分について式を立てる

$$V = RI + \frac{Q(t)}{C}$$

回路方程式からそれぞれの状況について考える

(2) $t = 0$ の時

回路方程式は

$$V = RI(0) + \frac{Q(0)}{C} = RI(0) + \frac{\frac{3}{2}CV}{C}$$

$$= RI(0) + \frac{3}{2}V$$

$$RI(0) = V - \frac{3}{2}V$$

$$RI(0) = -\frac{1}{2}V$$

$$I(0) = -\frac{V}{2R}$$

初期条件より

$$Q(0) = \frac{3}{2}CV$$

(3) 十分に時間が経った時

回路方程式は

$$V = RI(\infty) + \frac{Q(\infty)}{C} = R \cdot 0 + \frac{Q(\infty)}{C} = \frac{Q(\infty)}{C}$$

$$Q(\infty) = CV$$

十分時間が経った

↓

コンデンサーが満タン
電荷の移動が止まる

↓

$$I(\infty) = \frac{dQ(\infty)}{dt} = 0$$

回路方程式を解く

$$V = RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

$$V = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{Q(t)}{RC}$$

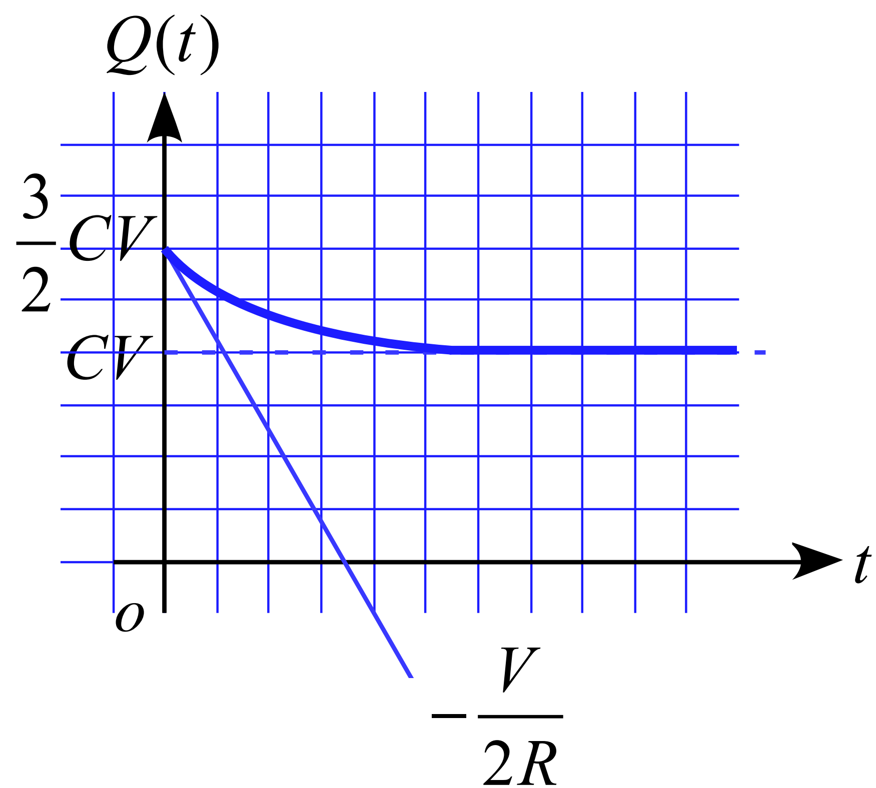
$$Q(t) = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Q についてまとめると

$$Q(0) = 0$$

$$Q(\infty) = CV$$

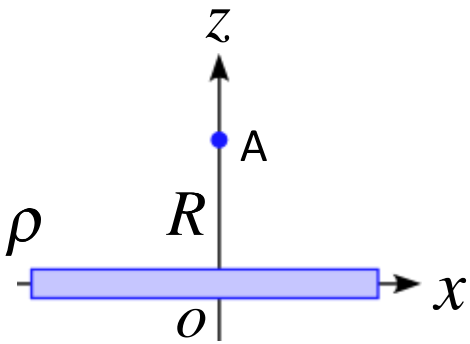
$$I(0) = \frac{dQ(0)}{dt} = -\frac{V}{2R}$$



グラフを書く時のpoint

- 始点　$t = 0$
- 終点　$t = \infty$
- 概形
- 特殊な点

15. 期末

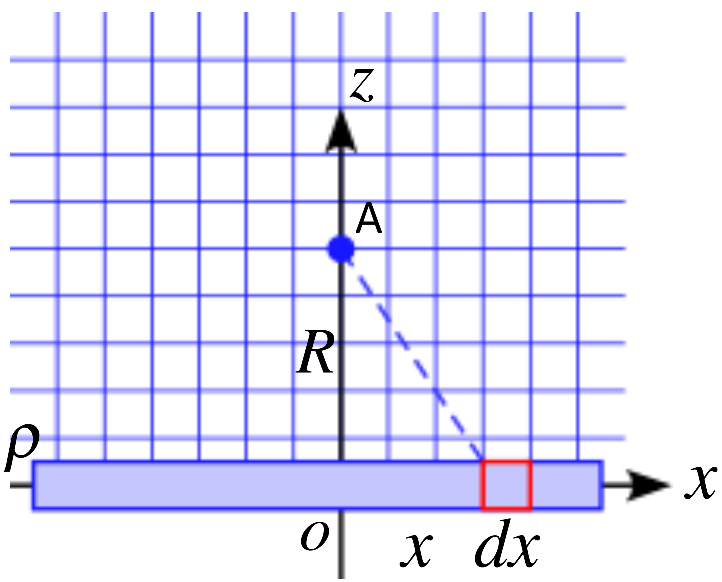


線電荷のモデル

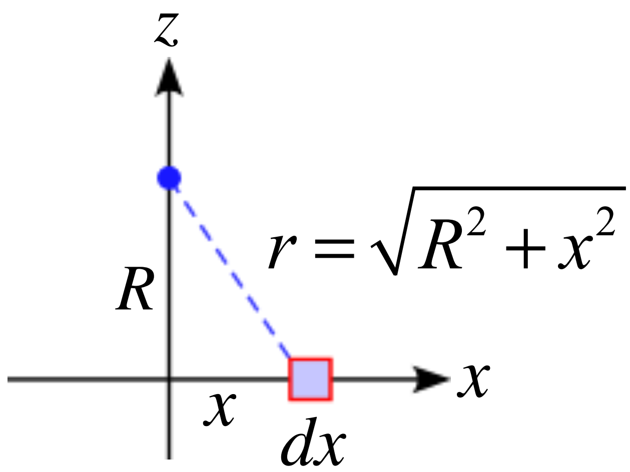
2つの方法で電場を求める

・クーロンの法則 ・・・ 点電荷についての法則なので微小部分を点電荷とみなして微小部分による電場を求めて後で全部合計(積分)する

・ガウスの法則 ・・・ ガウスの法則を適用する空間をうまくとる



作図は一直線上に作用しているのが判るように書く

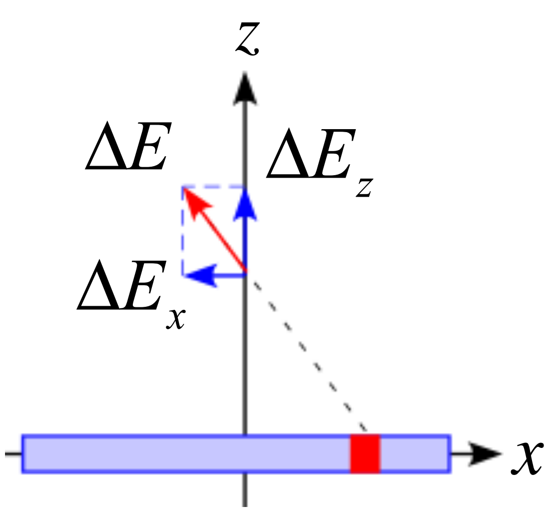


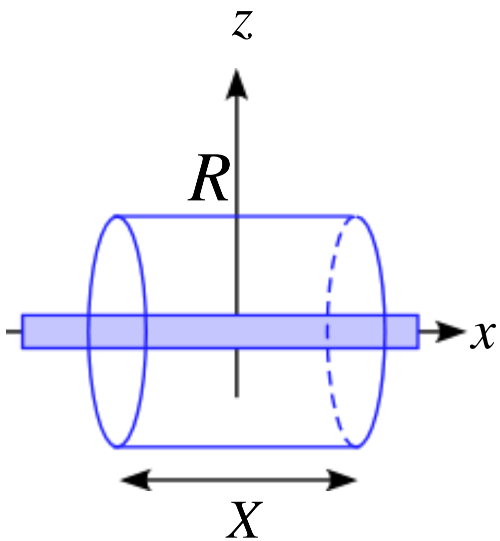
微小部分による電場は

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{\left(\sqrt{R^2+x^2}\right)^2}$$

z 軸方向の成分は

$$\Delta E_z = \Delta E \cos\theta$$



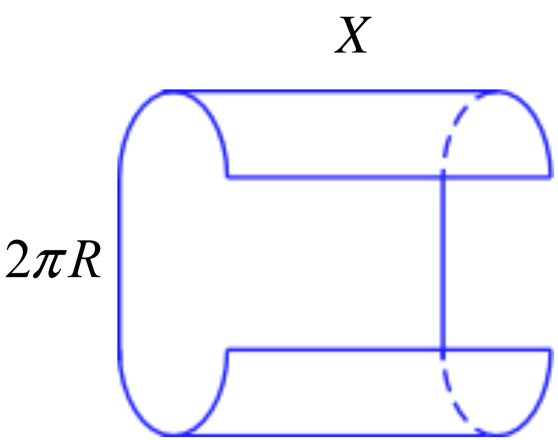


図のような円筒を閉曲面として考える

ガウスの法則の式は

$$\boxed{E_n S = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

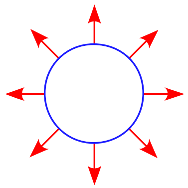
$$E_n 2\pi RX = \frac{\rho X}{\varepsilon_0}$$



電場は

$$E_n = \frac{\rho X}{\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi RX} = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

16. 期末 (一部 中テスト)



E_n は面を垂直に貫かなければならない

閉曲面が球なら放射状になるので垂直に貫いている

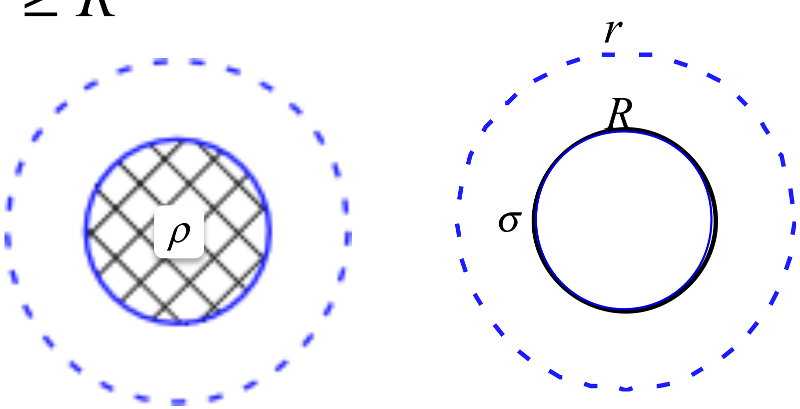
電気量 Q はいくらか？

密度

A: 球の体積全体に分布 ・・・ ρ

B: 球の表面に分布 ・・・ σ

$r \geq R$

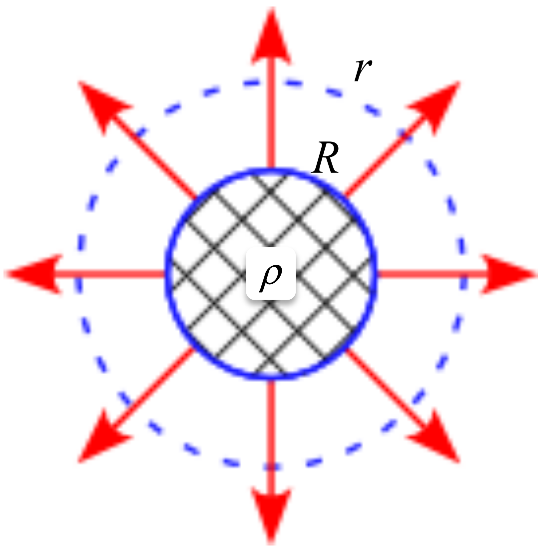


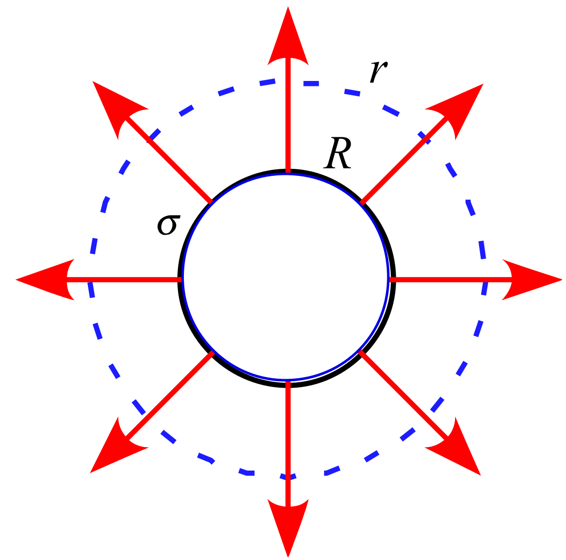
$$Q_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \qquad Q_B = 4\pi R^2 \cdot \sigma$$

$r \leq R$

$$Q_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \qquad Q_B = 0$$

$r \geq R$





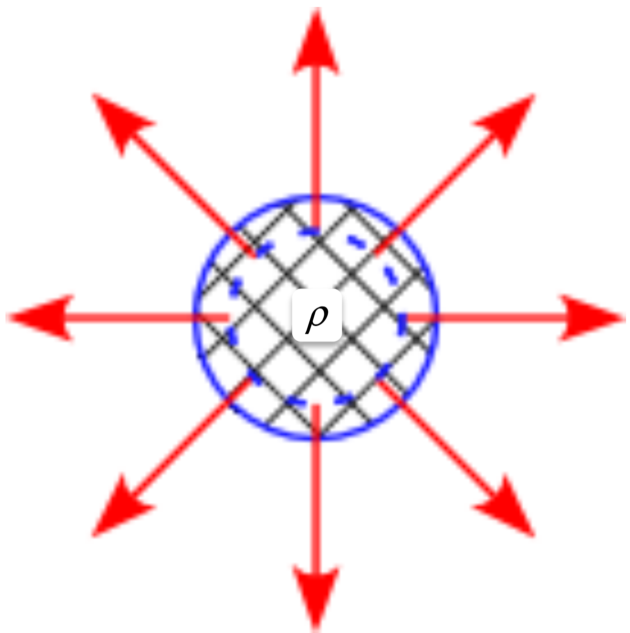
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

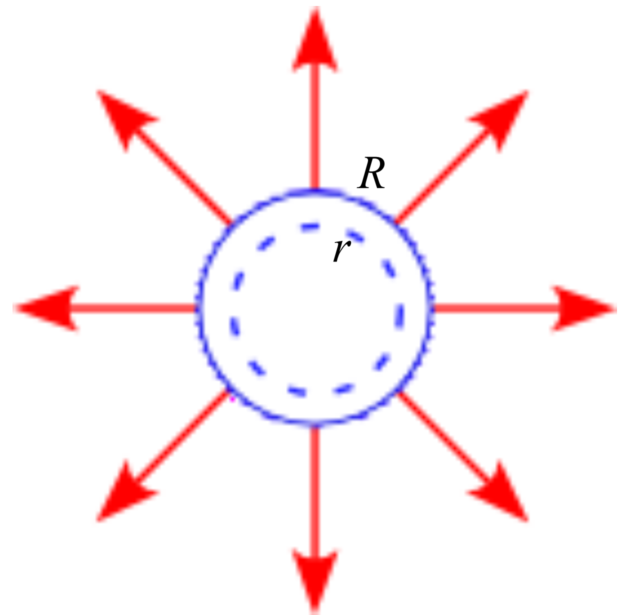
$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 4\pi R^2 \sigma$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$$

$r \leq R$





$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

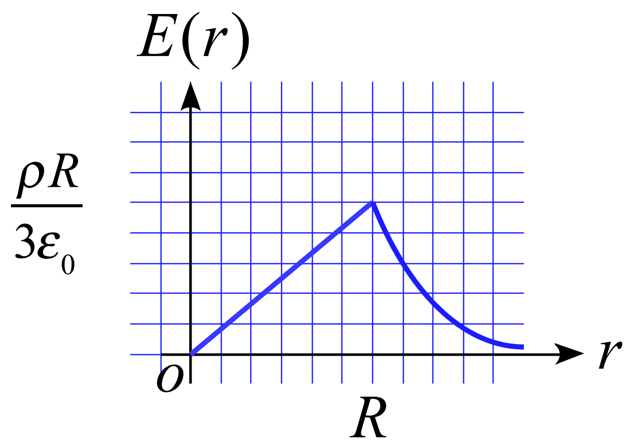
$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot 0$$

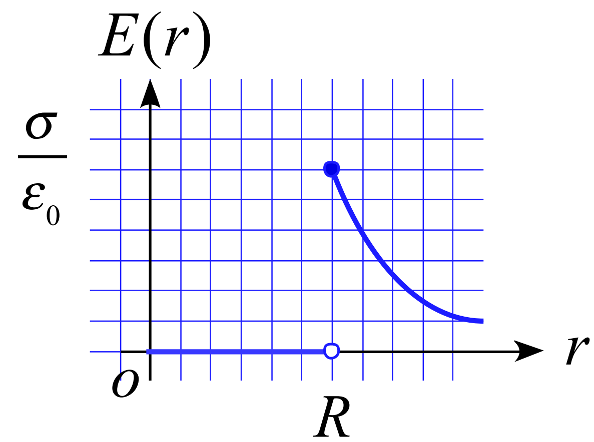
$$E(r) = 0$$

従ってグラフは

A



B



グラフを書く時のpoint

- 始点　$t=0$
- 終点　$t=\infty$
- 概形
- 特殊な点