2015講義ノート　力学

Introduction

物理 (Physics)

扱う範囲

非常に小さい

クオーク

quark

$\sim 10^{-18}$ [m]

45 桁

非常に大きい

宇宙

universe

$\sim 10^{27}$ [m]

分野

古典物理学 (マクロな世界)

ニュートン力学
解析力学
古典電磁気学
古典熱力学

量子力学が発達

現代物理学 (ミクロな世界)

量子力学
量子統計力学
特殊相対性理論
一般相対性理論
その他、専門分野

物理量～単位系

物理量

MKS単位系

Length :長さ	Time :時間	Mass :質量
m	sec	kg
[L]	[T]	[M]

(参考)

長さ: 1m
光が真空中で1/299792458 s の間に進む距離
時間: 1s
133Cs原子が吸収する電磁波の周期の9192631770倍
質量: 1kg
パリの国際度量衡局に保管されている
白金イリジウム合金円柱の質量

国際単位系の基本単位

物理量	単位記号	名称
長さ	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (second)
電流	A	アンペア
熱力学的温度	K	ケルビン
物質量	mol	モル
光度	cd	カンデラ
平面角	rad	ラジアン
立体角	sr	ステラジアン

国際単位系(SI)
国際度量衡委員会が基本量の
標準を定めた単位系

次元解析～誘導単位

次元解析

次元：物理的性質を表している

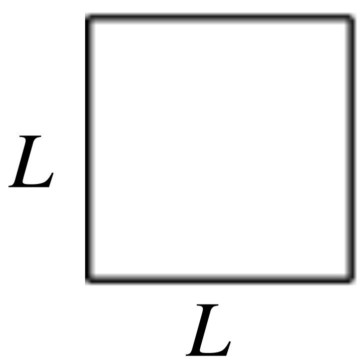
式の導出などの検証の手段になる

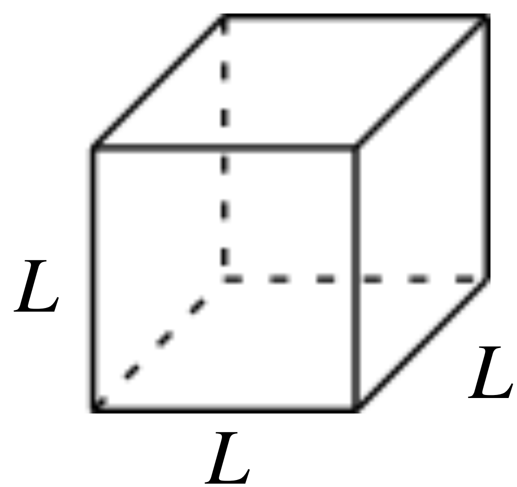
計算をしていて、何かオカシイ？
と思ったら、次元解析をするとよい

例

物理量	関係式	単位記号	次元
面積 (Square)	$S = L \times L$	m^2	$[L^2]$
体積 (Volume)	$V = L \times L \times L$	m^3	$[L^3]$
密度 (Density)	$\rho = m / V$	g / cm^3	$[M / L^3]$

← CGS 単位系





次元解析～誘導単位

物理量	関係式	単位記号	次元
速度、速さ (Velocity , Speed)	$v=$	m / s	[LT^{-1}]
加速度 (Acceleration)	$a=$	m / s^2	[LT^{-2}]
力 (Force)	$f=$	kg・m / s^2 ＝ N	[LMT^{-2}]
仕事 (Work)	$W=$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
運動エネルギー (Kinetic energy)	$K=$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
力積 (Impulse)	$I=$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]
運動量 (Momentum)	$p=$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]

接頭語

単位の10の整数乗倍を表すために接頭語を用いる

例

10^3 m=1 km

k は10^3を示している

国際単位系における接頭語

接頭語	記号	ベキ
ペタ (peta)	P	10^{15}
テラ (tera , terra)	T	10^{12}
ギガ (giga)	G	10^{9}
メガ (mega)	M	10^{6}
キロ (kilo)	k	10^{3}
ヘクト (hecto)	h	10^{2}
デカ (deka , deca)	da	10^{1}
デシ (deci)	d	10^{-1}
センチ (centi)	c	10^{-2}
ミリ (milli)	m	10^{-3}
マイクロ (micro)	μ	10^{-6}
ナノ (nano)	n	10^{-9}
ピコ (pico)	p	10^{-12}
フェムト (femto)	f	10^{-15}

番外編

オングストローム
(angstrom)

Å $=10^{-10}$

例

$$1\ \mathrm{km} = 1\times 10^{3}\ \mathrm{m}$$
$$= 1000\ \mathrm{m}$$

$$1\ \mathrm{cm} = 1\times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

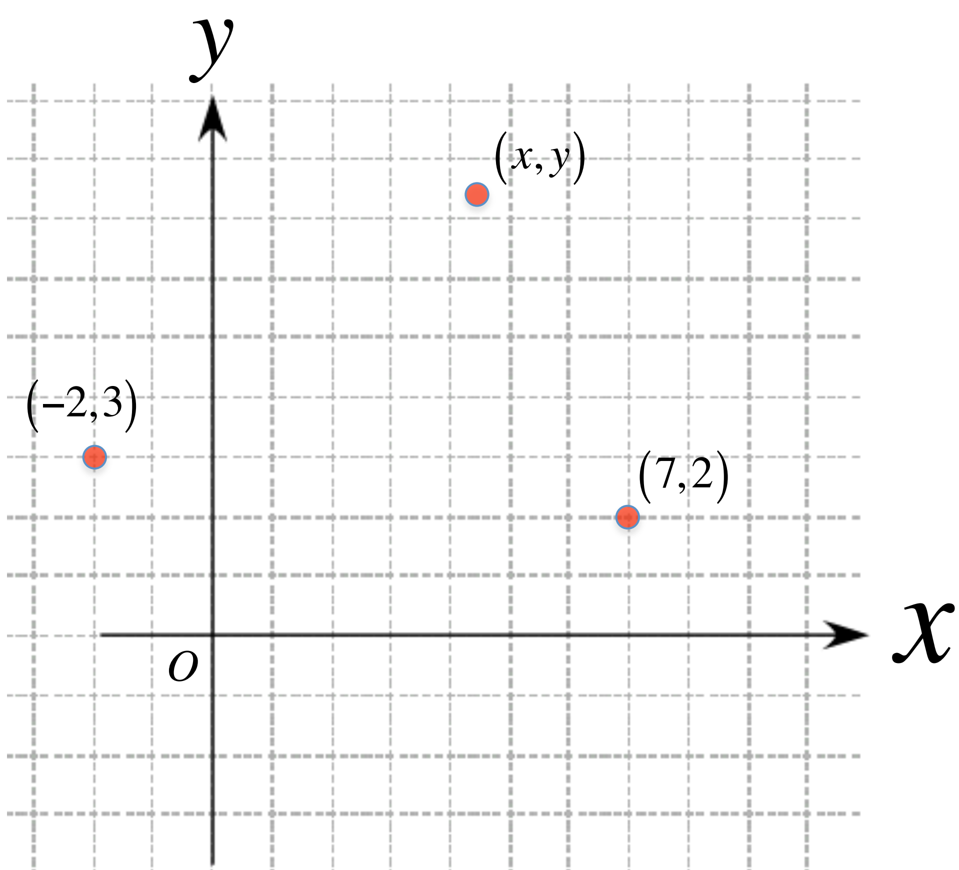
$$100\ \mathrm{cm} = 1\ \mathrm{m}$$

ベクトル～座標系

空間内の位置を特定するための座標系は3数の要素で構成される
1.基準点 O(原点)
2.適当な尺度で標識を目盛った1組の座標軸　(x, y – 2次元)
3.原点及び座標軸に対して空間内の点をどのように表記するかという約束

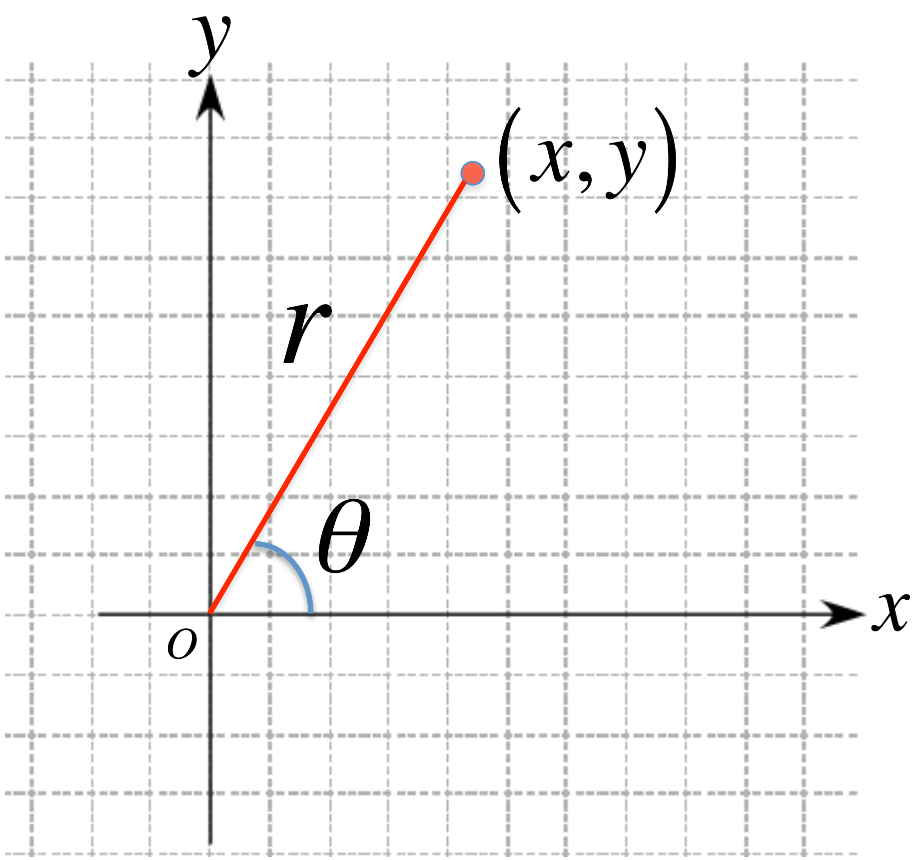
座標系
・デカルト座標系 (直角座標系)
・極座標系

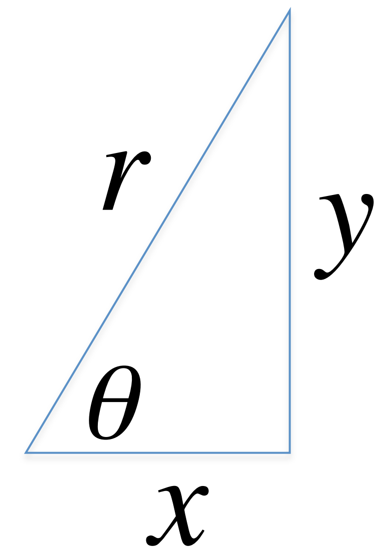
例 (2次元)
直角座標系



座標系～極座標系

例 (2次元)
極座標系





直角座標系で表すと

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

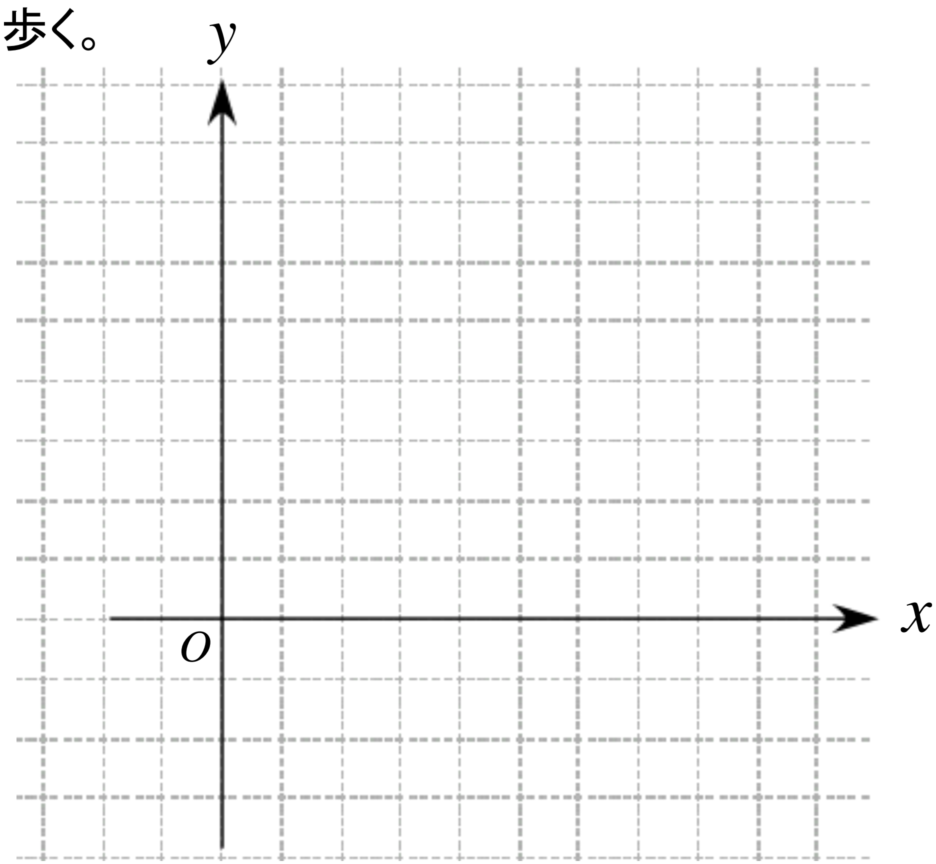
ベクトルとスカラー

ベクトルとスカラー

ベクトル : 大きさと向き (変位、速度)
スカラー : 大きさのみ (距離、速さ)

例題

ある歩行者が東に7km及び北に4km歩く。
合成変位を作図し、大きさを求めよ。
(1目盛は1km)



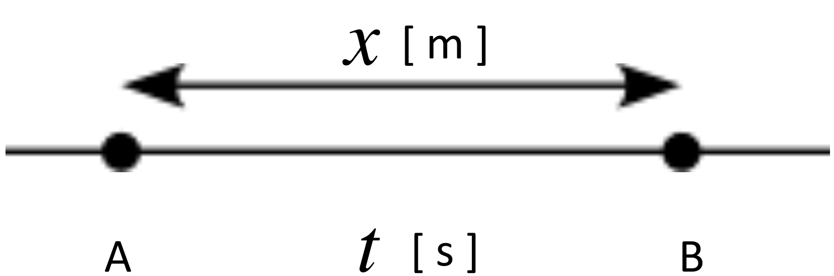
速度・加速度～速さ

物理では・・・時間変化が重要

例えば

物が動く・・・ 速さ、速度 加速度 が知りたい

平均の速さ: 目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか
「平均するとどの程度の速さでず～っと走り続けたのと同じか」



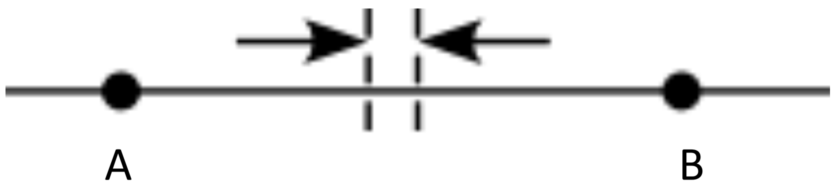
平均の速さ

$$\overline{v} = \frac{x}{t} \quad [\,\mathrm{m/s}\,]$$

速さ

瞬間の速さ　:ある時点での「スピード」のこと

Δx [m] (極めて短い距離)



Δt [s] (極めて短い時間)

瞬間の速さ

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

[m / s]

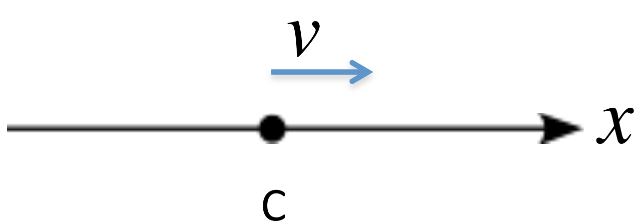
速さ～速度

速度＝速さ＋向き ←ベクトル

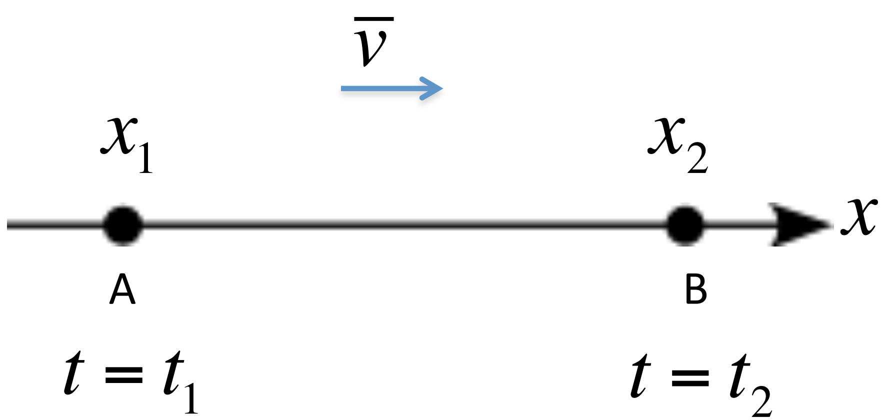
物理学では
大きさも向きも大事

例

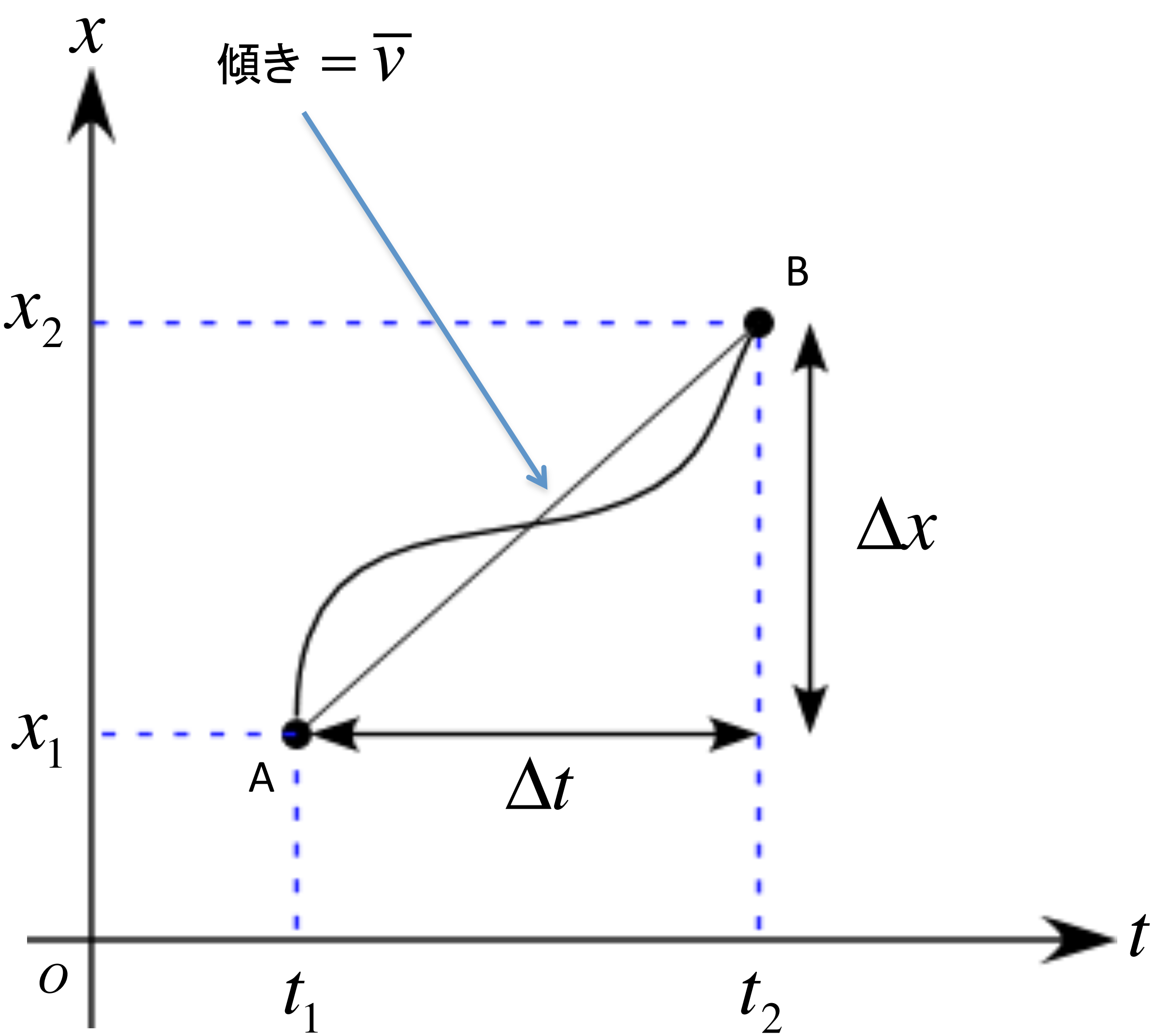
５ [m/s]の速さで走っている（どっち向きかわからない）
５ [m/s]の速度で走っている（ある特定の向きに走っている = 向きが決まっている）



平均速度 : 時間tに対する変位xの変化



質点の位置 – 時間の関係



平均速度

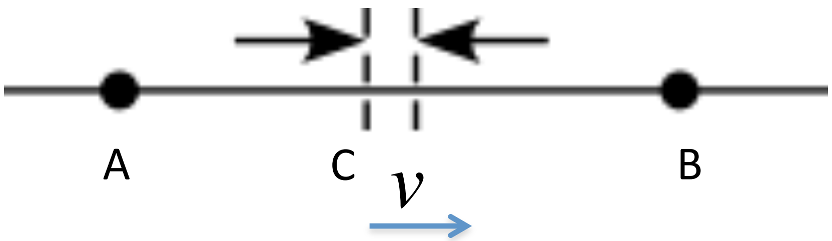
平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

瞬間速度

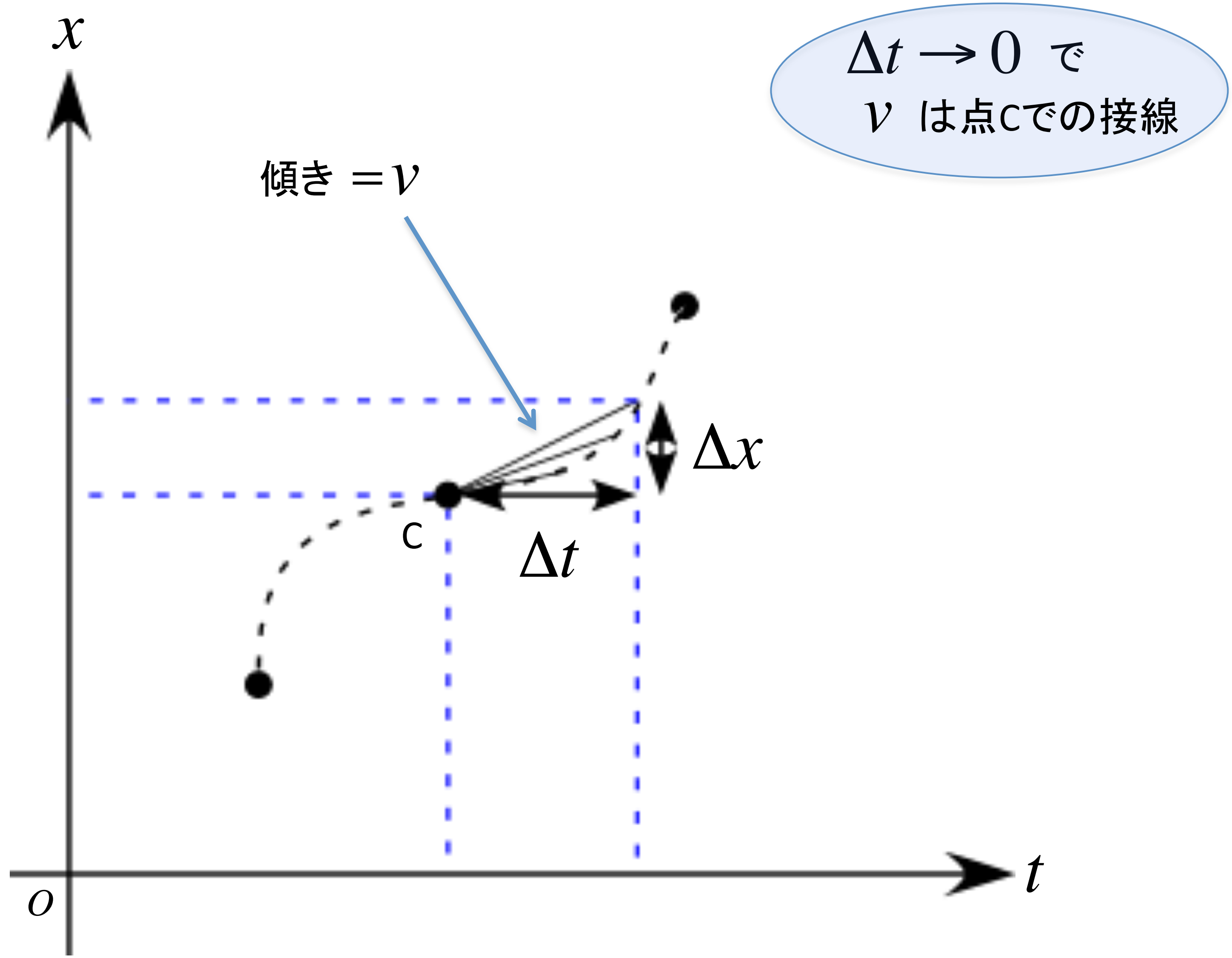
瞬間速度

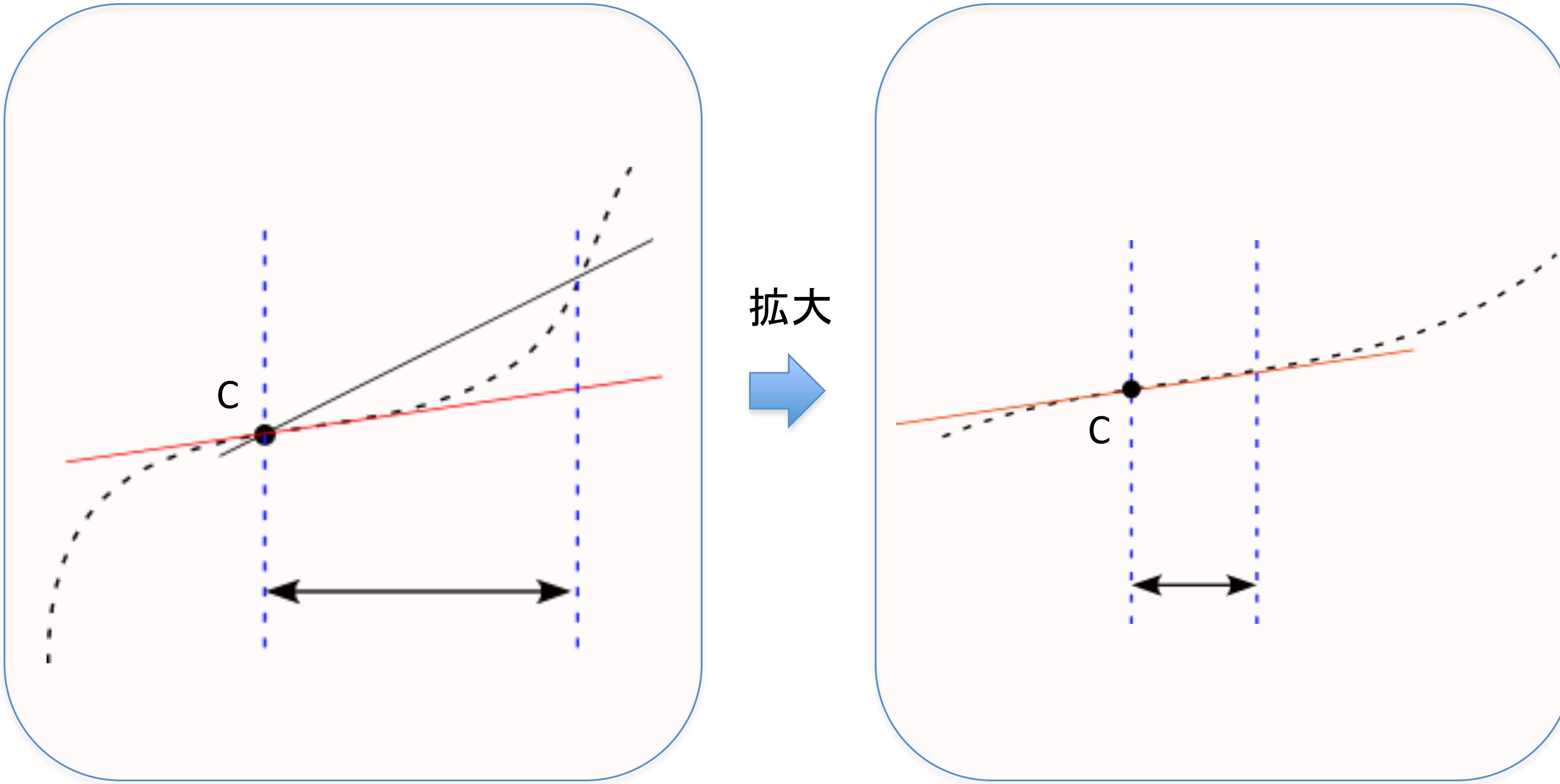
Δx [m] (極めて短い距離)



Δt [s] (極めて短い時間)

質点の位置 – 時間の関係





$\Delta t \to 0$ で

v は点Cでの接線

速度～瞬間速度

瞬間速度

変位

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{x(t+\Delta t) - x(t)}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点 $t_1 = 1$ [s]のとき $x_1 = 14$ [m]の位置にあり、

$t_2 = 3$ [s]のとき $x_2 = 4$ [m]の位置にある。

この時間における変位と平均速度を求めよ。

加速度

加速度:どれくらいの時間をかけて、どれくらい速度が変化するかの度合い

時間に対する速度変化率

平均加速度

v_0　　$\Delta v =$　　v_1

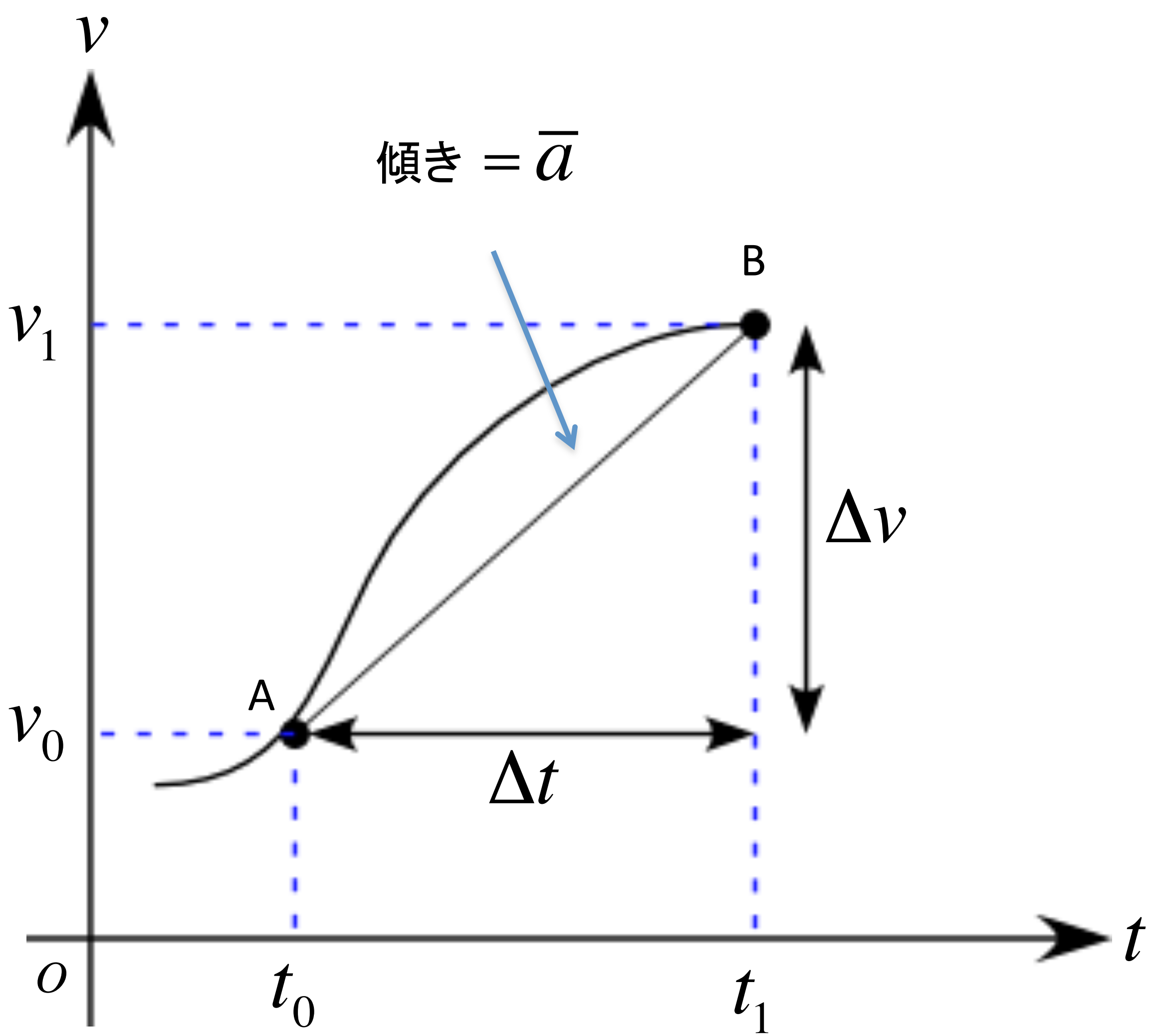
$t = t_0$　　$t = t_1$

$\Delta t =$

平均加速度

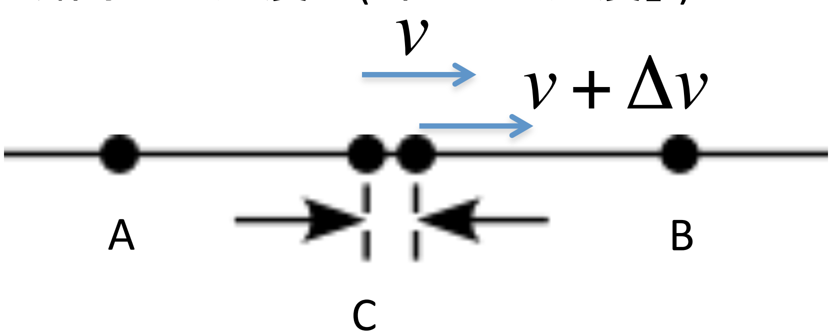
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

質点の速度 – 時間の関係



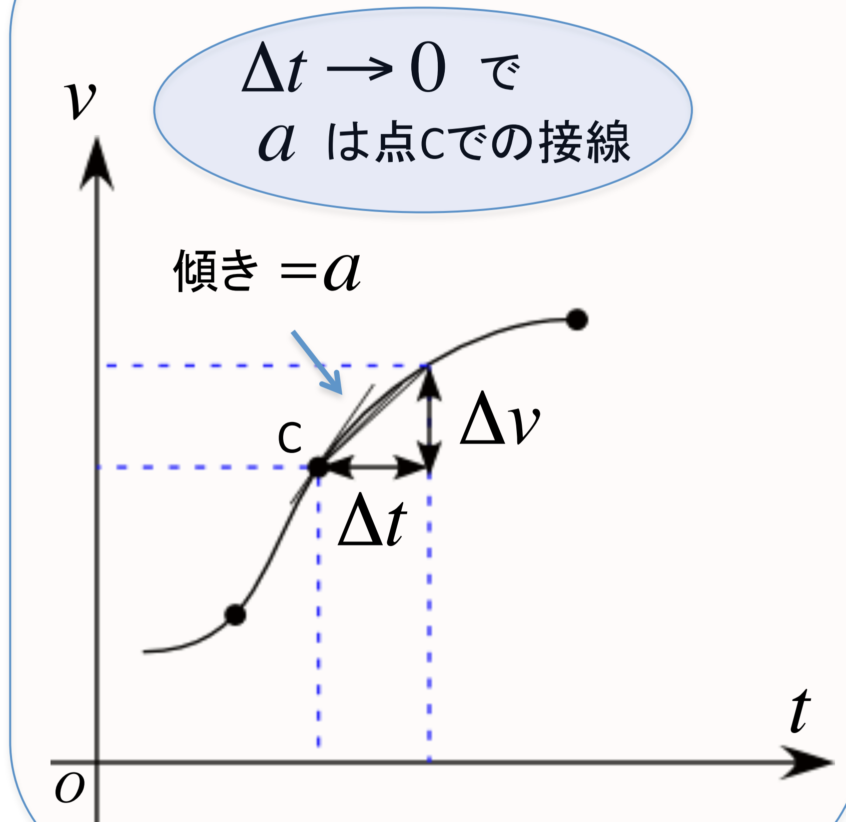
加速度～瞬間加速度

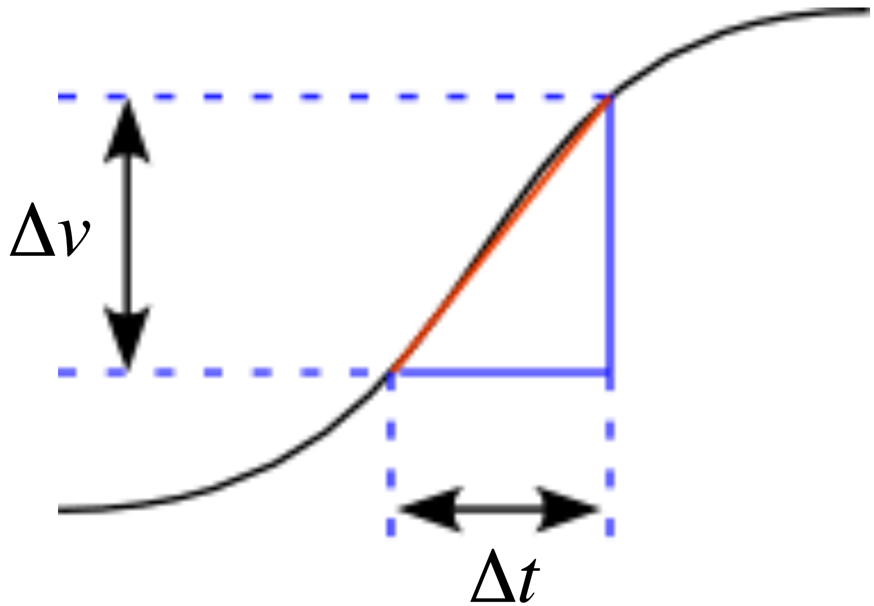
瞬間の加速度　(単に「加速度」)



Δt　(極めて短い時間)

質点の速度－時間の関係





Δv
Δt

瞬間加速度

瞬間加速度

速度変化

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{(v + \Delta v) - v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

v は t の関数であると考えると

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2回微分する

加速度

それぞれ何を意味するか考えよう

$a > 0$	$a < 0$
加速する	減速する（ブレーキをかける）
	逆向きに走っているという意味ではない

加速度～例題

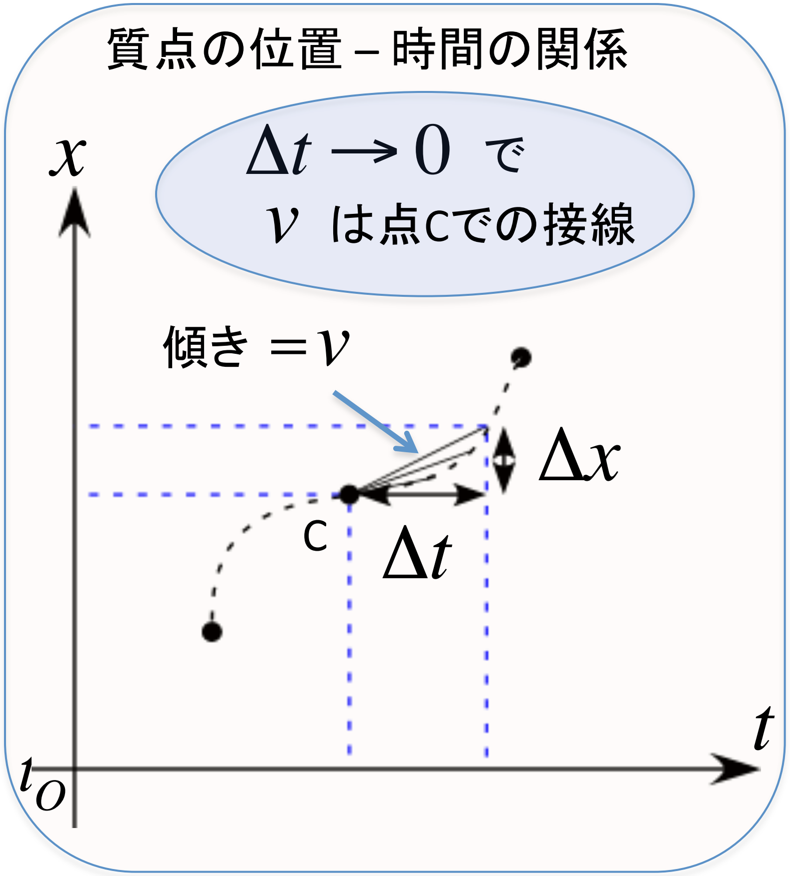
例題

x 軸に沿って運動する質点が $v = 5 + 10t$ [m / s] に従って運動する。この質点は $t = 0$ [s]における位置は 20 [m] である。

1. 加速度を時間 t の関数として表せ。
2. $t = 0$ における質点の速度を求めよ。
3. 位置を t の関数として表せ。

速度～まとめ

速度



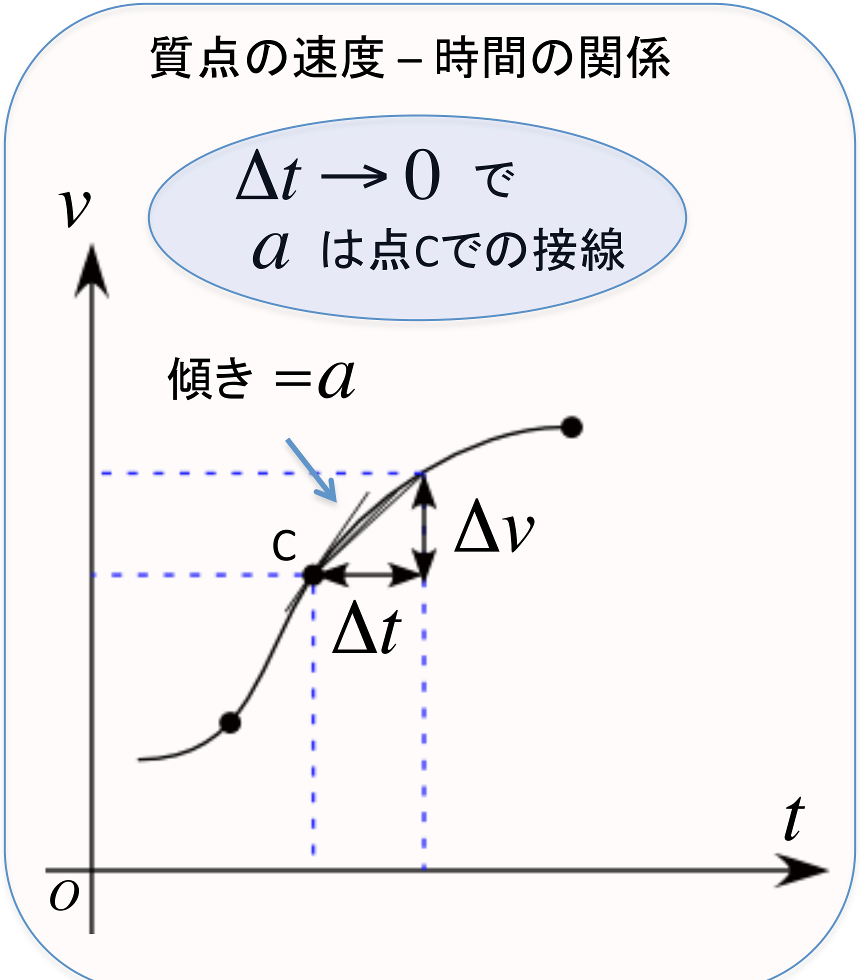
変位の時間変化率

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

変位 x を時間 t で微分したもの

加速度～まとめ

加速度



速度の時間変化率

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

速度 v を時間 t で微分したもの

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

等速度運動

等速度 (等速直線運動)

速さ
向き
→ 一定 (constant)

$$v = v_0$$

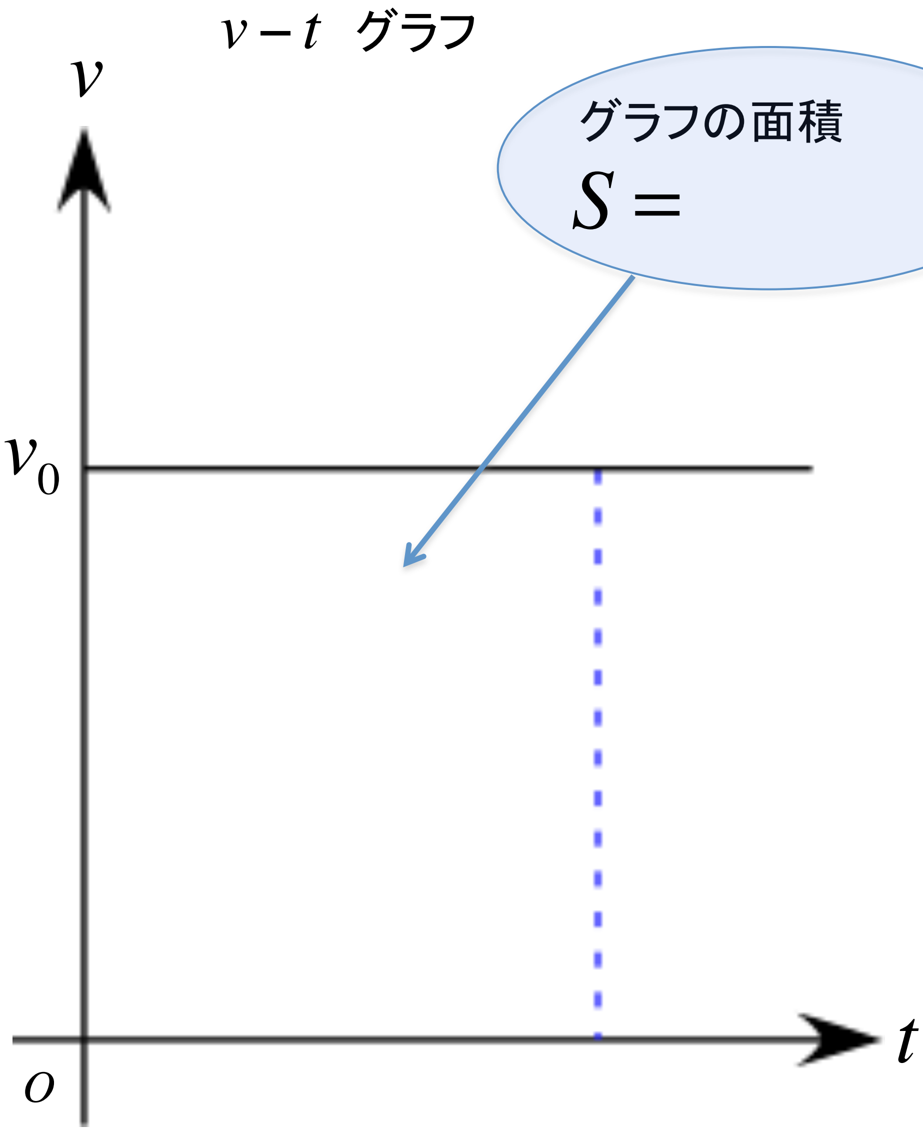
$$x_0 = 0 \qquad x_1 = x$$

$$t_0 = 0 \qquad t_1 = t$$

$$v = v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x-0}{t-0} = \frac{x}{t}$$

$$\boxed{x = v_0 t}$$

距離 = 速さ × 時間



変位 = $v-t$ グラフの面積

等加速度運動

等加速度

一定の加速度で直線運動

$v_0 = v_0$ $v_1 = v$

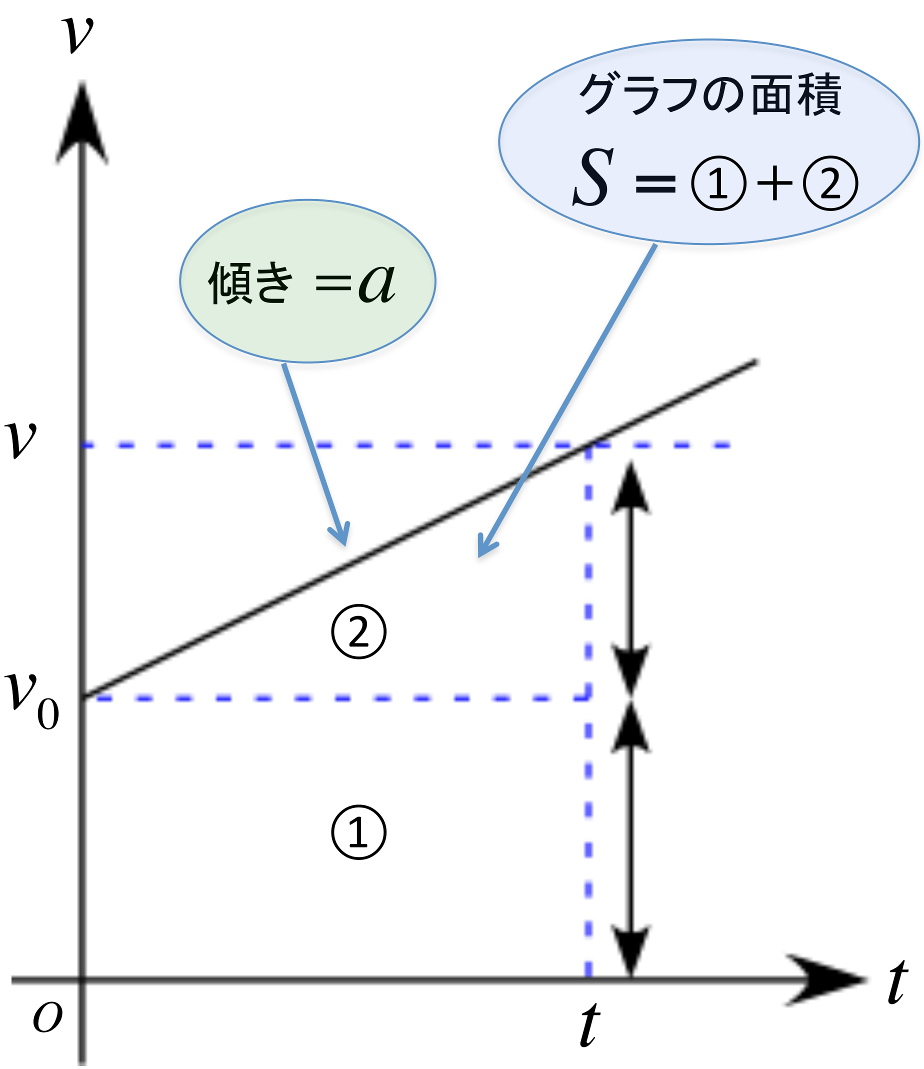
$x_0 = 0$ $x_1 = x$

$t_0 = 0$ $t_1 = t$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\boxed{v = v_0 + at}$$

$v-t$ グラフ



$v-t$ グラフの面積

$S=①+②$

変位 = $v-t$ グラフの面積

等加速度運動

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

t を消去 $\Rightarrow$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

(参考)

平均速度

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (a\text{ が一定の場合})$$

変位

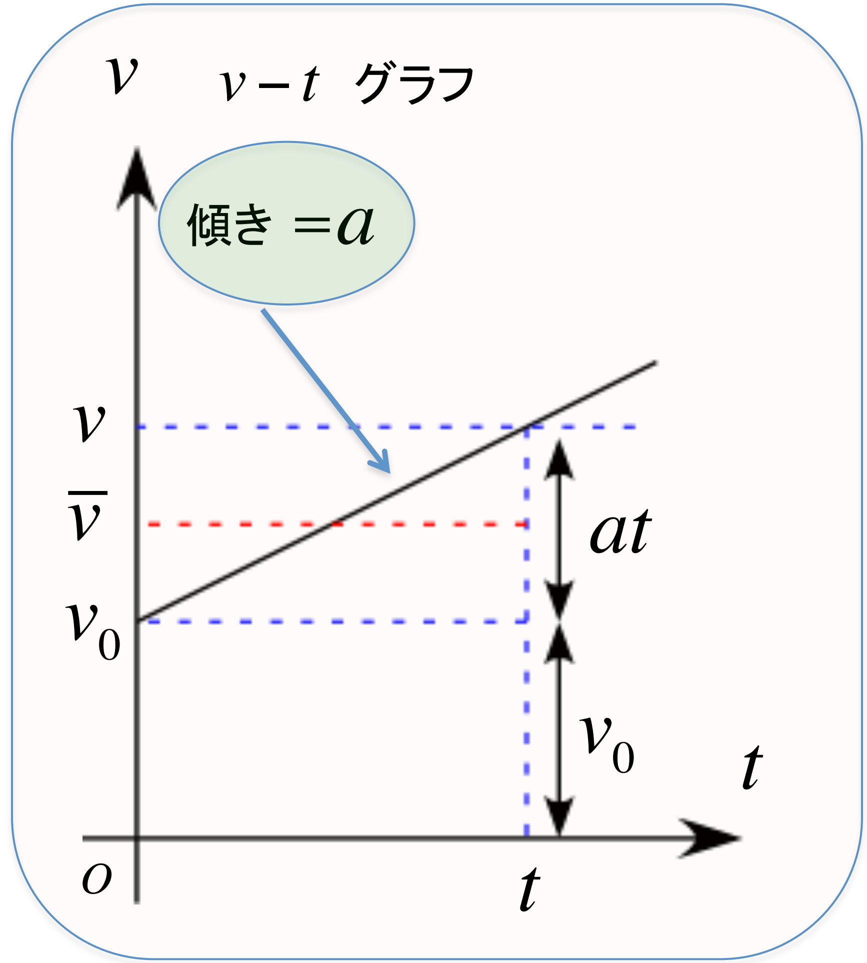
$$\Delta x = \overline{v}\Delta t$$

$$x - 0 = \frac{1}{2}(v + v_0)(t - 0)$$

$$x = \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + at + v_0)t$$

$$\boxed{x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$



$v_0 = v_0$ $\qquad$ $v_1 = v$

$x_0 = 0$ $\qquad$ $x_1 = x$

$t_0 = 0$ $\qquad$ $t_1 = t$

等加速度運動

例題

等加速度運動の速度と変位の式

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

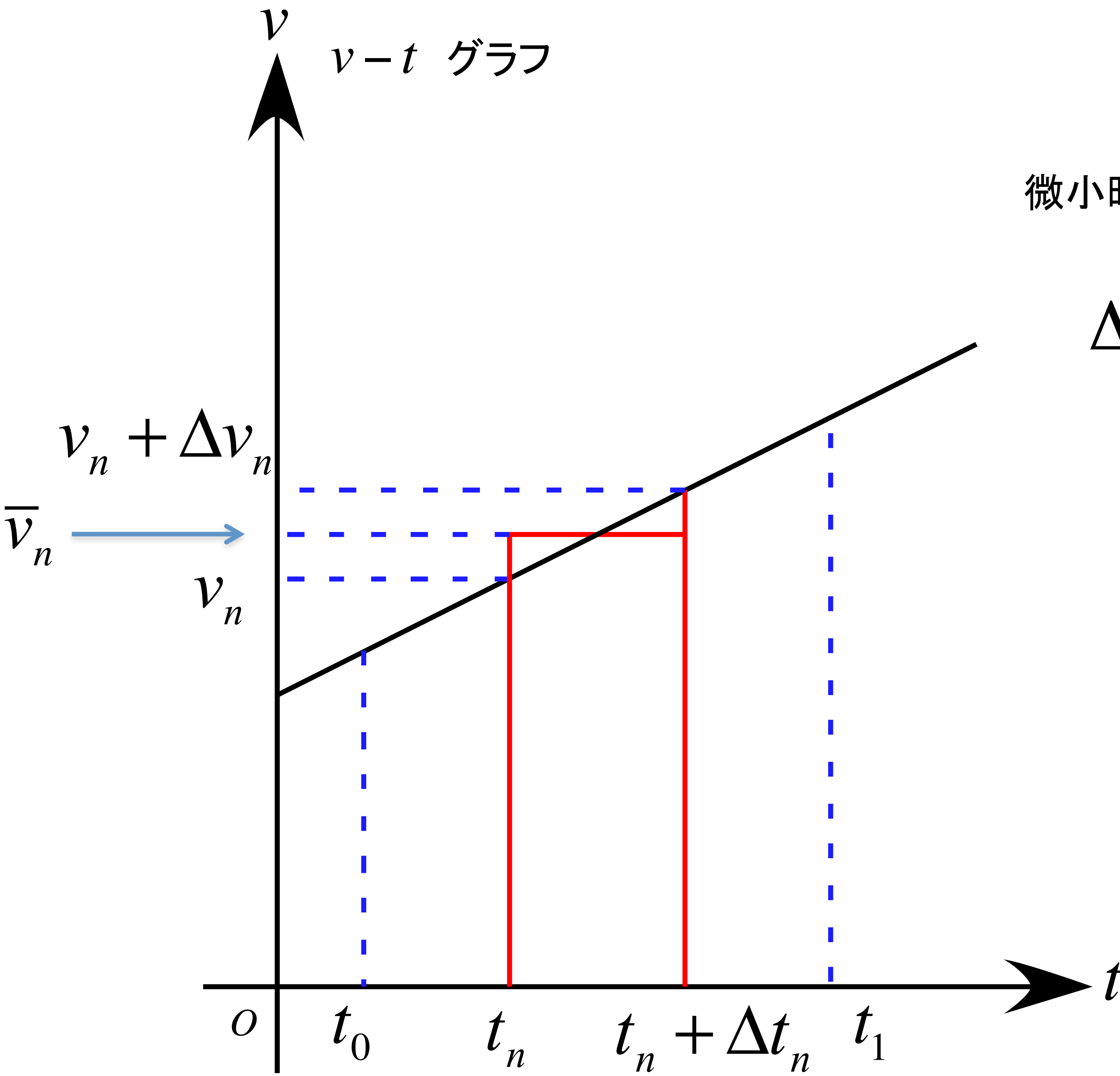
から、

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

を導け。

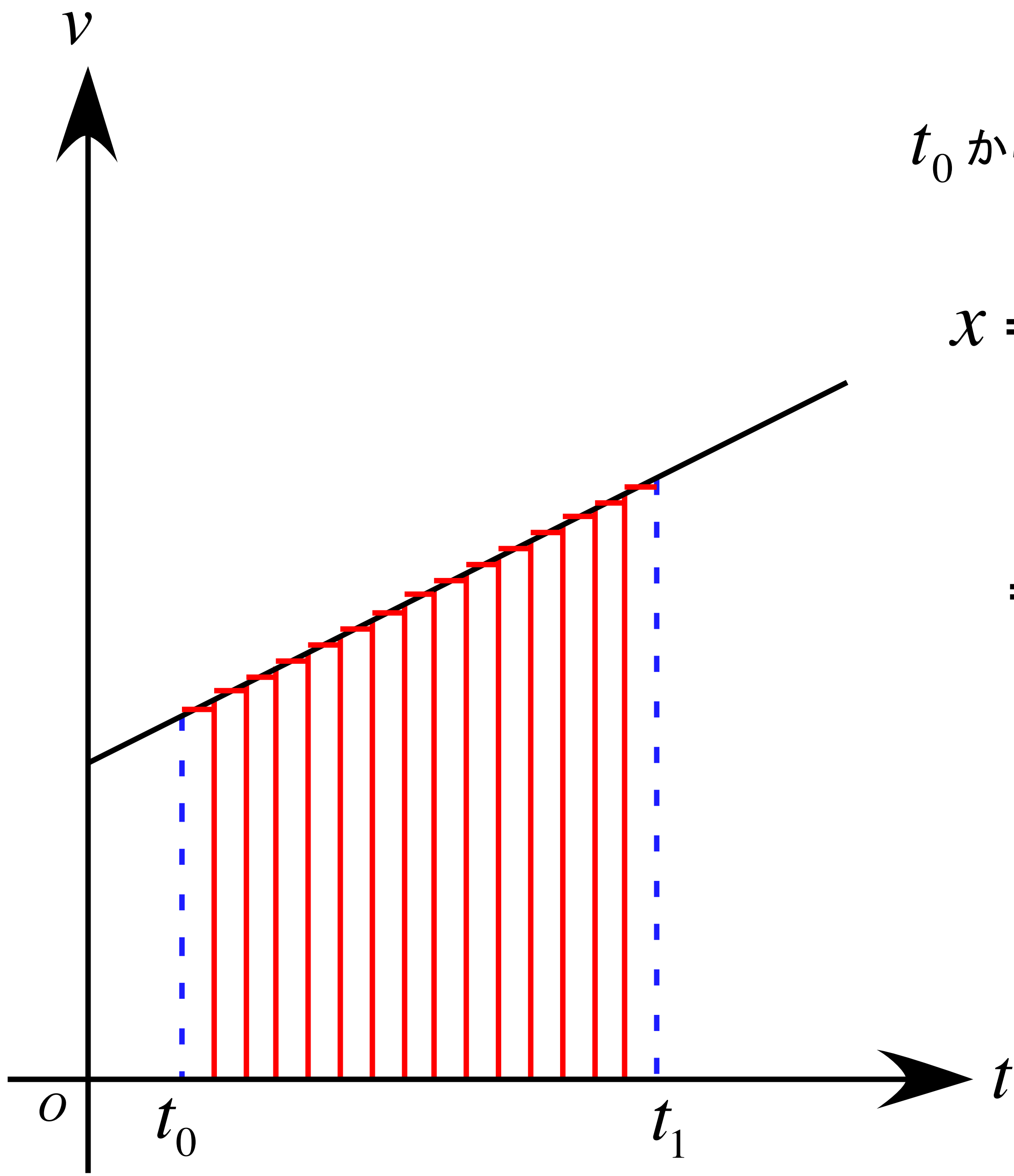
（参考）

変位と$v-t$グラフの面積



微小時間Δt_nにおける変位は

$$\Delta x_n = \overline{v}_n \cdot \Delta t_n$$

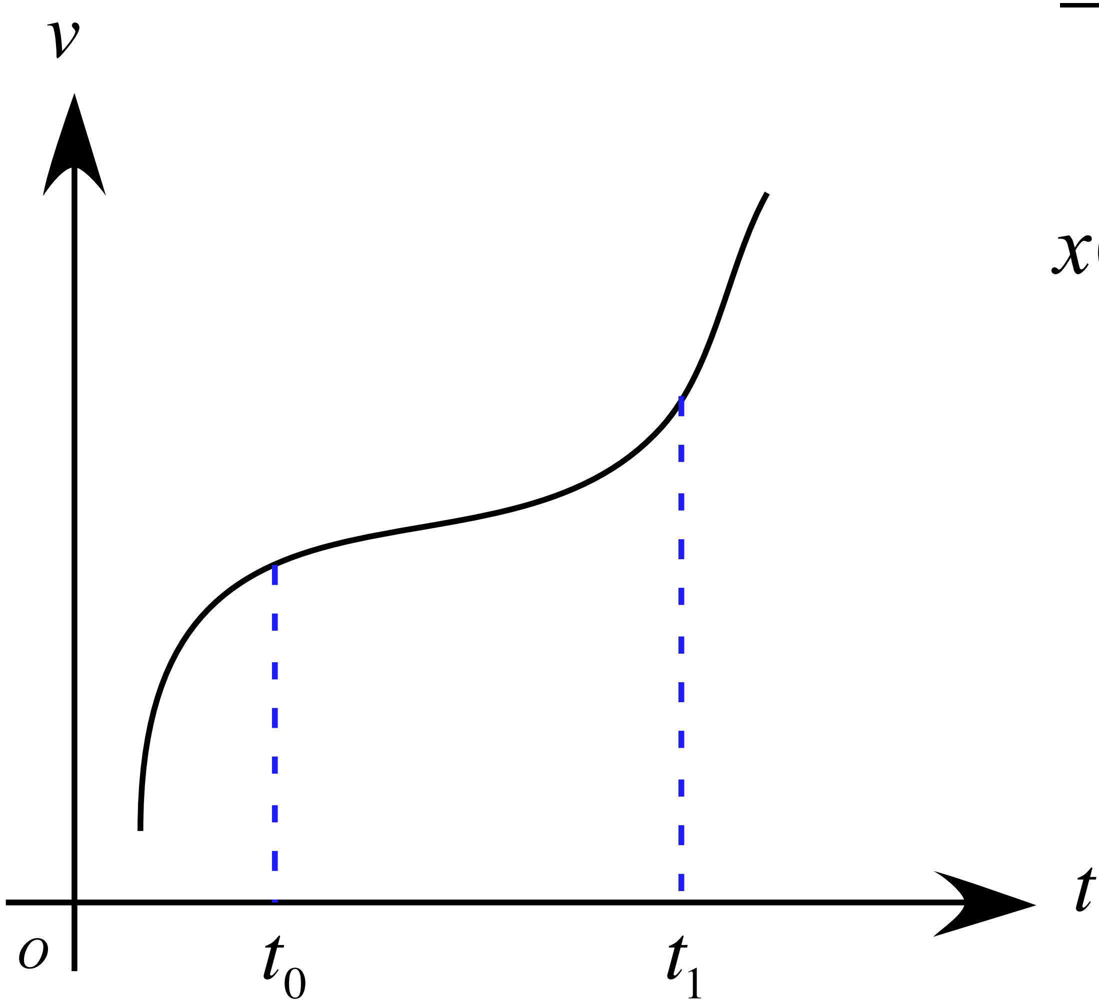


t_0 から t_1 まで合計する

$$x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_{n} \overline{v}_n \cdot \Delta t_n$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

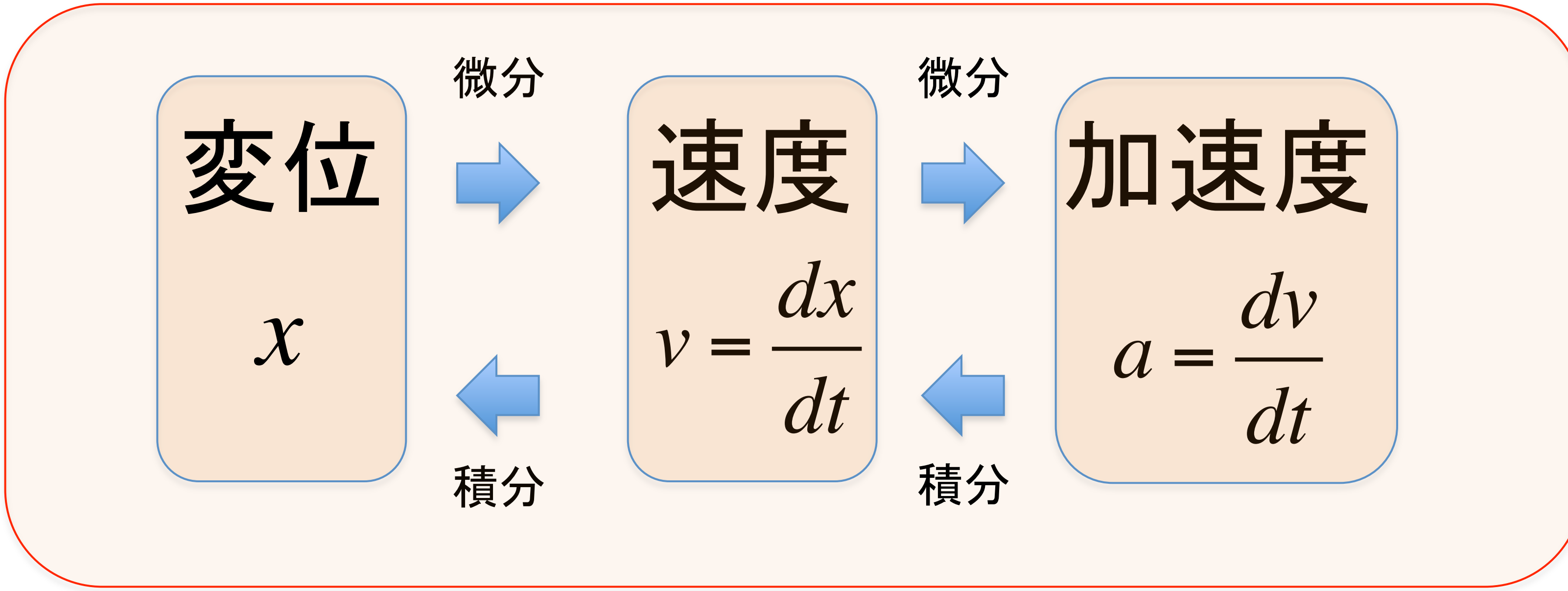
$v-t$ グラフ



一般的に

$$x(t)=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

変位～速度～加速度



例題

等速度運動と等加速度運動の変位と加速度を定義式から導け。
(但し、初期条件は $t = 0$ で $x = 0$ とする。)

等速度運動 : $v = v_0$

等加速度運動 : $v = v_0 + at$

力～力の種類

物理での「力」の定義

・物体の運動状態を変化させるもの

・物体を変形させるもの

力

力の種類 （3つ）

場の力

重力場 (Gravitational field) による力（重力）

電場 (Electric field) による力

磁場 (Magnetic field) による力

接触力

張力 : 糸などが物体を引っ張る力 (tension)
垂直抗力 : 床や壁などが物体を垂直な向きに押し返す力 (normal force)
弾性力 : バネやゴムなどが自然長に戻ろうとする力 (elastic force)
摩擦力 : 物体の面同士に働く力 (frictional force)

慣性力

質量が慣性をもつために現れる見かけの力
(電車の急発進)

物体に働く力を探す

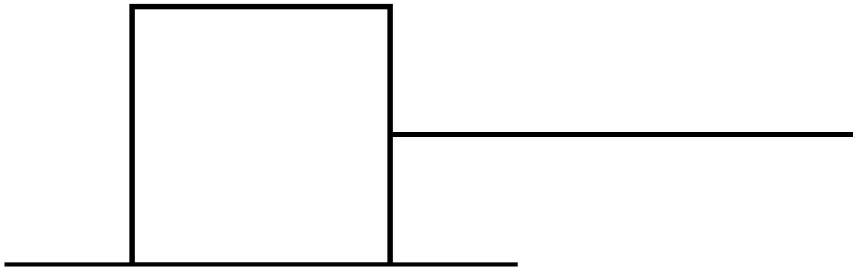
場の力→接触力→慣性力　←この順番で、どういう状態かを考える

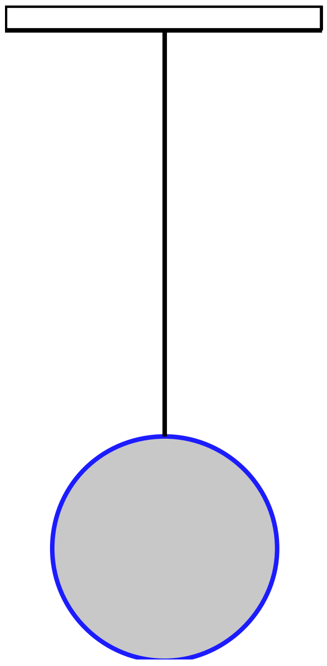
1. 場の力はあるか？　(重力)

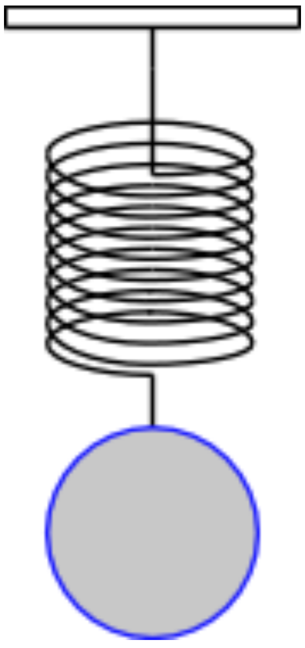
2. 接触力はあるか？

ー 何かに接触しているか？
ー それによって力が働いているか？

3. 慣性力はあるか？







ニュートンの運動の法則

- 第1法則 (慣性の法則)
 すべての物体は、外部から作用を受けない限りその運動の状態をそのまま維持する。
 静止しているものはそのまま静止をし続け、ある速度で運動しているものはそのままの速度を保持して直線上を等速運動し続ける。

- 第2法則 ($\vec{F}=m\vec{a}$)
  物体に外から力が作用するとき、その物体の得る加速度の大きさは、加えた力の大きさに比例し、その方向は力の向きに一致する。

- 第3法則 (作用・反作用の法則)
 2つの物体の間に作用する力は、それらを結ぶ直線上に作用し、その大きさは等しく、方向は反対向きである。

慣性の法則

慣性：物体が常に現在の状態を保とうとする性質

ガリレイ以前の物理にはこのような考え方は無かった。

→さまざまな間違いを含んでいた

間違いの例

・軽いものはゆっくり落ちる　→空気の摩擦力のため

・何もしなければやがて物体は止まる　→床との摩擦力のため

運動状態が変化

これらの邪魔する力さえなければ、「現在の運動状態を保つ」
→物体は運動状態を変えることはない。

慣性の法則

物体に力が働かないか、働いていてもつり合っていれば

静止している物体：静止し続ける
運動している物体：等速度運動を続ける　$\vec{v}$ が一定

力に着目する

運動方程式

物体に力が働かないか、
働いていてもつり合っている

慣性の法則が成立

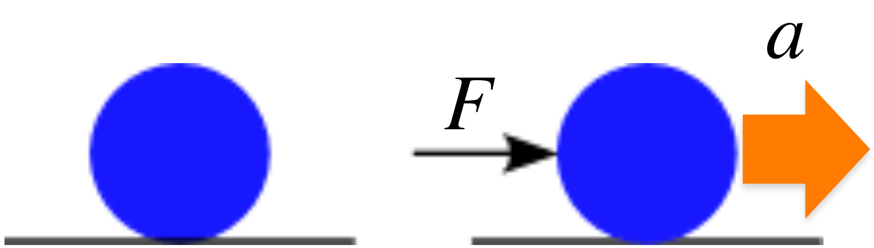
崩れる

運動状態が変化

最初：停止

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v$$

速度を持つには、加速度が必要



大きな力が加われば、
大きな加速度が得られるはず

F は a に比例する

$$a \propto F$$

F は m に比例する

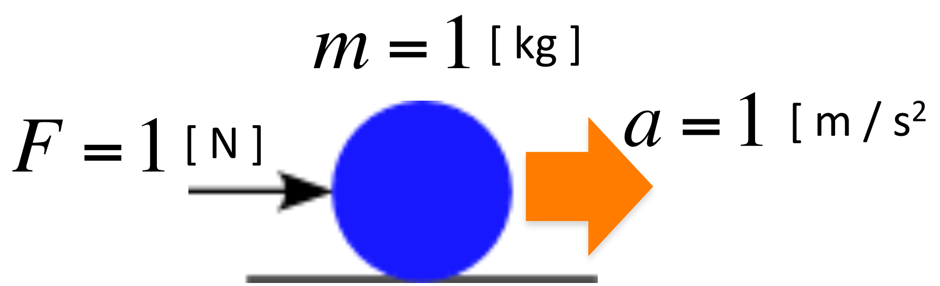
$$m \propto F$$

$$k \cdot ma = F$$

k は比例定数

定義

$m=1$ [kg] の物体に
$a=1$ [m / s^2] の加速度を
生じさせる力を $F=1$ [N] とする



$$k\cdot ma=F \xrightarrow{k=1} ma=F$$

運動方程式

$$ma=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=F$$

力学＝ニュートン力学

運動方程式

次元解析

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML]}{[T^2]}$$

$$ma = F$$

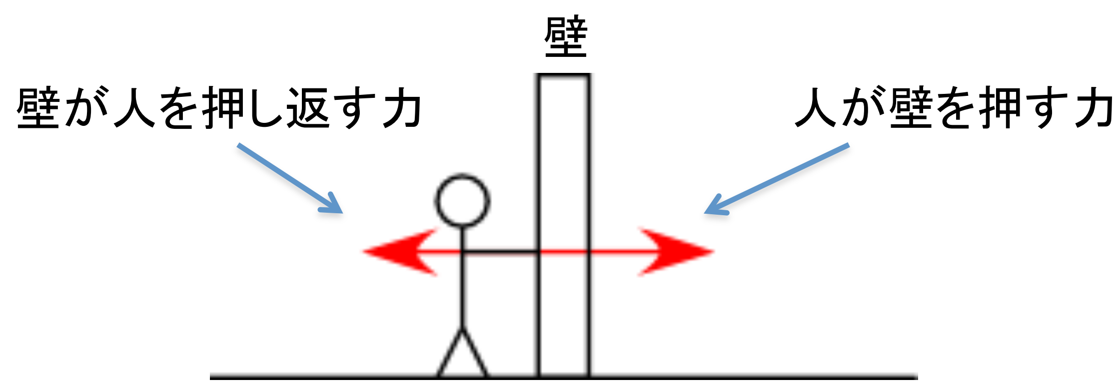
注意）

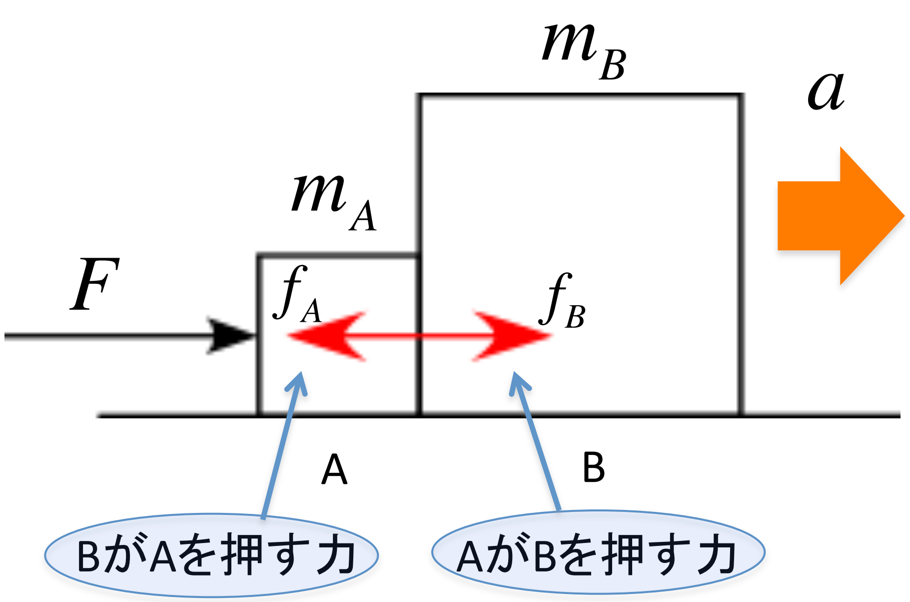
質量と重さの違い

質量：動きにくさの度合いを表した物理量
重さ：物体に働く重力　　←重さは力

作用・反作用の法則

例



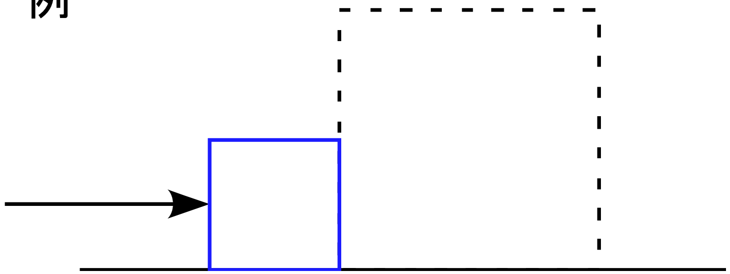


- 摩擦は無視
- 物体A、Bは一緒に右に運動

作用・反作用の法則

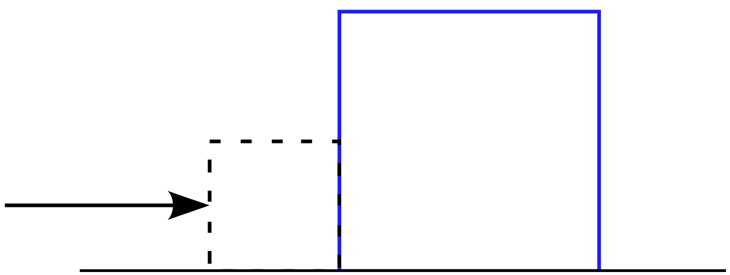
例

物体A、Bそれぞれの運動方程式



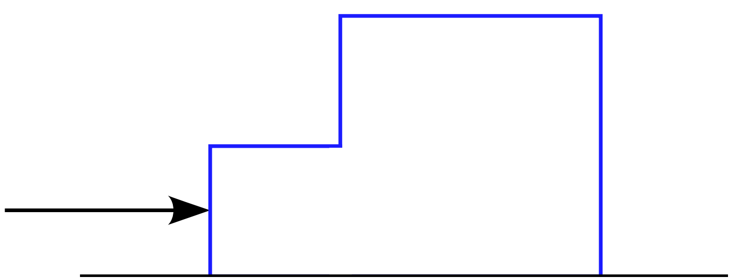
$$m_A a = F - f_A$$

$$m_B a = f_B$$



$$(m_A + m_B)a = F - f_A + f_B$$

接着剤で接着して、塊を押すと考えると



$$(m_A + m_B)a = F$$

同じ現象を表す式だから、数学的にも同じ式でなければならない

$$\underbrace{\boxed{F}}_{\text{塊と見た}} = \underbrace{\boxed{F - f_A + f_B}}_{\text{AとB別々と見た}}$$

$$-f_A + f_B = 0$$

$$f_A = f_B$$

従って、f_A と f_B は、互いに逆向きで大きさが同じ

→作用・反作用の法則が成り立っている

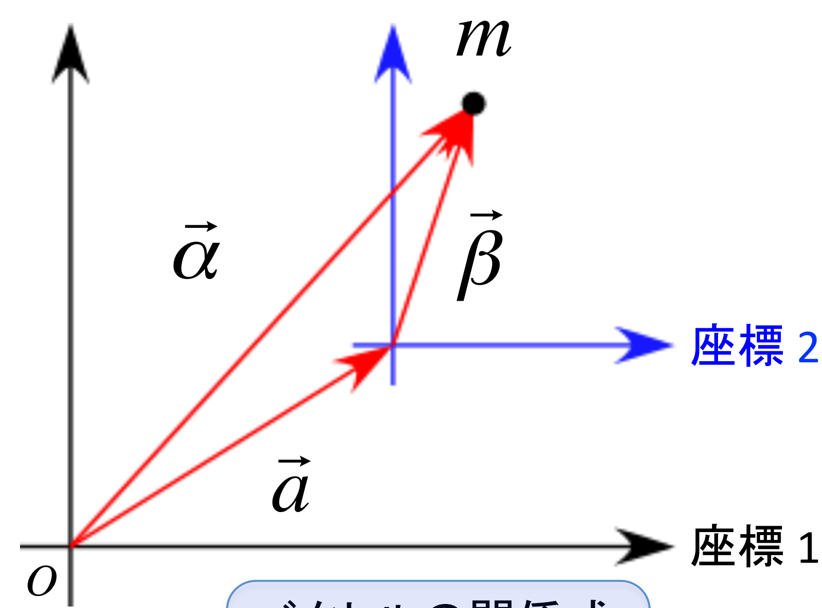
慣性力

静止している座標系 : 座標 1
動いている座標系 : 座標 2

$\vec{a}$: 座標 1 から見た座標 2 の加速度

$\vec{\alpha}$: 座標 1 から見た物体の加速度

$\vec{\beta}$: 座標 2 から見た物体の加速度



ベクトルの関係式

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + \vec{\beta}$$

座標 1 から見た物体の運動方程式

$$m\vec{\alpha} = \vec{F}$$

$$m\left(\vec{a} + \vec{\beta}\right) = \vec{F}$$

$$\boxed{m\vec{\beta}} = \vec{F} \boxed{- m\vec{a}}$$

座標 2 から見た運動方程式

見かけの力 (慣性力)

慣性力～エレベータ

例題

一定の加速度 α で上昇するエレベータがある。

このエレベータ内で質点を原点から初速度 v_0 で鉛直方向に投げ上げたところ、

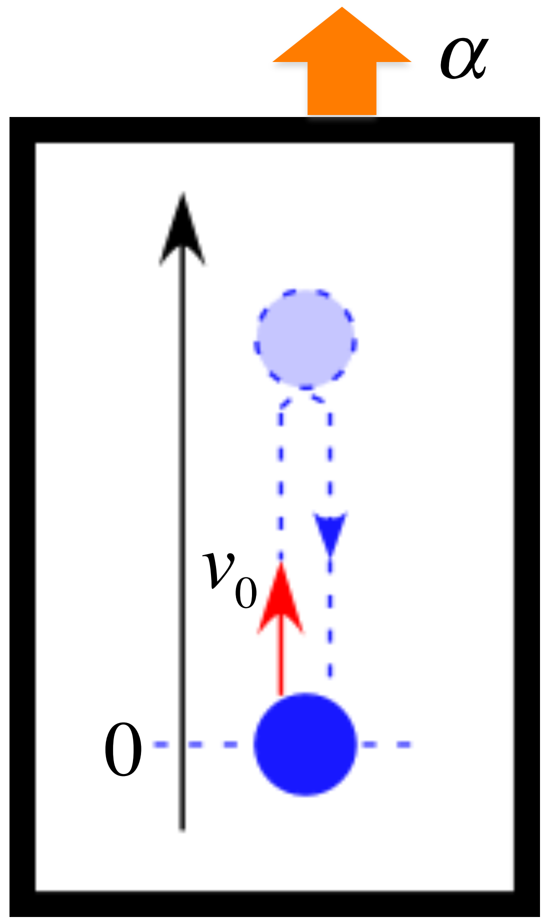
t_0 秒後に再び原点に戻ってきた。以下の問に答えよ。

(但し、重力加速度は g として用いること)

1. 質点に作用する力を記入せよ。

2. この運動の運動方程式を書け。

3. エレベータの加速度を求めよ。



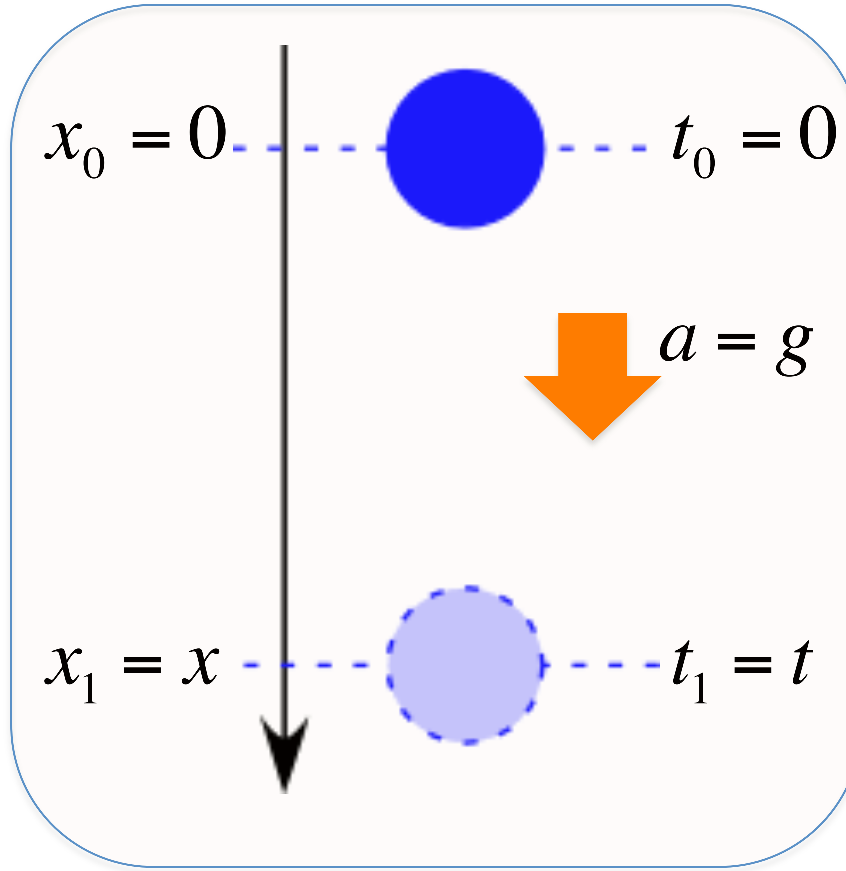
自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

$$a = g$$

よって、物体の加速度は常に一定
自由落下は「等加速度運動」である。



「等加速度運動」の式を用いると

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_0 = 0$$

$$a = g$$

$$v = 0 + gt = gt$$

$$x = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

この運動方程式を解くことで
速度と変位を導く。

$$a = \frac{dv}{dt}$$

を代入すると、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g$$

この式を t で積分すると

$$v = gt + C_1$$

初期条件より

$$0 = g \cdot 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

従って

$$\boxed{v = gt}$$

変位については

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

この式を t で積分すると

$$x = \frac{1}{2} g t^2 + C_2$$

初期条件より

$$0 = \frac{1}{2} g \cdot 0^2 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

従って

$$\boxed{x = \frac{1}{2} g t^2}$$

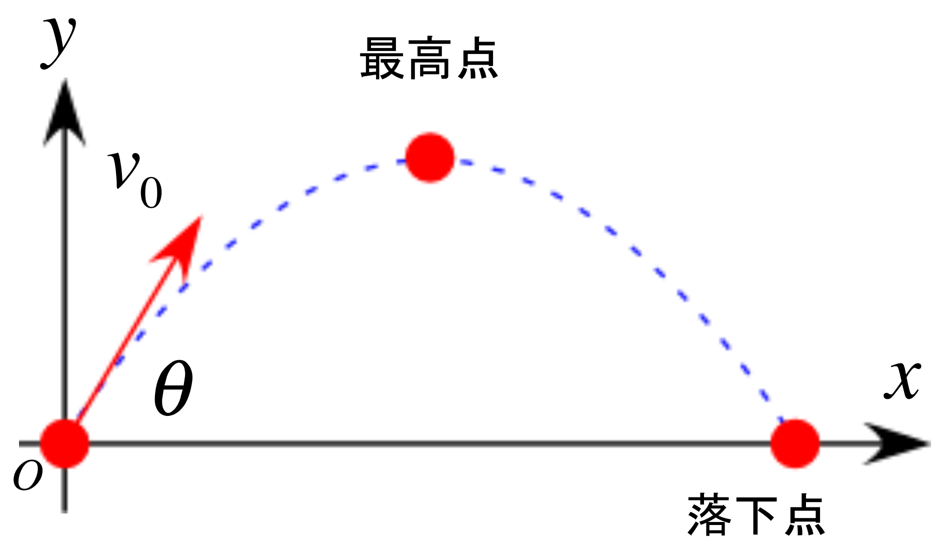
斜方投射運動(放物運動)

斜めに物体を投げ上げたときの運動

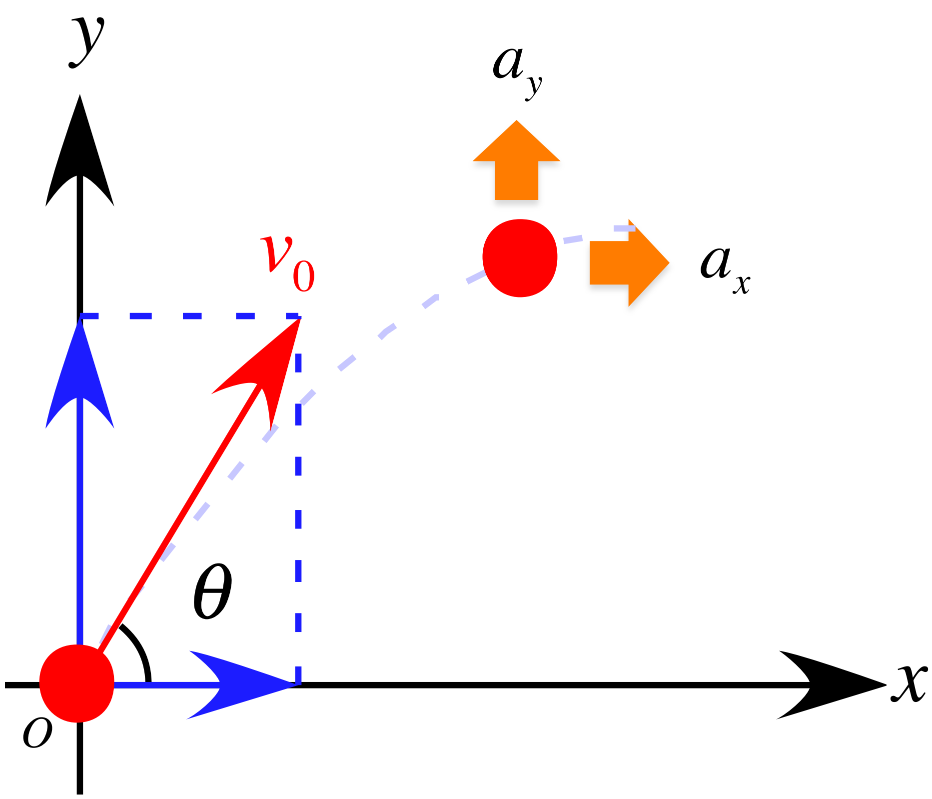
初速度：v_0

水平面との角度：θ

任意の時刻における物体の
速度、位置について考える



2次元の運動 → 分解 → 1次元の運動



それぞれの軸について
運動方程式を考えると

x 方向

$$ma_x = 0$$

y 方向

$$ma_y = -mg$$

それぞれの加速度は

$$a_x = 0$$

等速直線運動

$$a_y = -g$$

加速度 $-g$
等加速度運動

この2式を t で積分する。

x 方向

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$v_x = C_{x1}$$

初期条件 $t = 0$ のとき

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_x(0) = C_{x1} = v_0 \cos\theta$$

$$C_{x1} = v_0 \cos\theta$$

従って、速度 v_x は

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

y 方向

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

$$v_y = -gt + C_{y1}$$

初期条件 $t = 0$ のとき

$$v_{y0} = v_0 \sin\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_y(0) = -g \cdot 0 + C_{y1} = v_0 \sin\theta$$

$$C_{y1} = v_0 \sin\theta$$

従って、速度 v_y は

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

それぞれの速度は

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= v_0 \sin\theta - gt \end{aligned}}$$

ここで、さらに速度の式をそれぞれ t で積分する

x 方向

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$$

$$x = (v_0 \cos\theta)t + C_{x2}$$

初期条件 $t = 0$ のとき原点なので

$$x(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$x(0) = (v_0 \cos\theta) \cdot 0 + C_{x2} = 0$$

$$C_{x2} = 0$$

従って

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t$$

y 方向

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta - gt$$

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + C_{y2}$$

初期条件 $t = 0$ のとき原点なので

$$y(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$y(0)=\left(v_0\sin\theta\right)\cdot 0-\frac{1}{2}g\cdot 0^2+C_{y2}=0$$

$$C_{y2}=0$$

従って

$$y(t)=\left(v_0\sin\theta\right)t-\frac{1}{2}g\cdot t^2$$

任意の時刻における変位は

$$x(t)=\left(v_0\cos\theta\right)t$$

$$y(t)=\left(v_0\sin\theta\right)t-\frac{1}{2}g\cdot t^2$$

放物運動の確認

時刻 t を求めると

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

これを y に代入すると

$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

$$= (\tan\theta) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

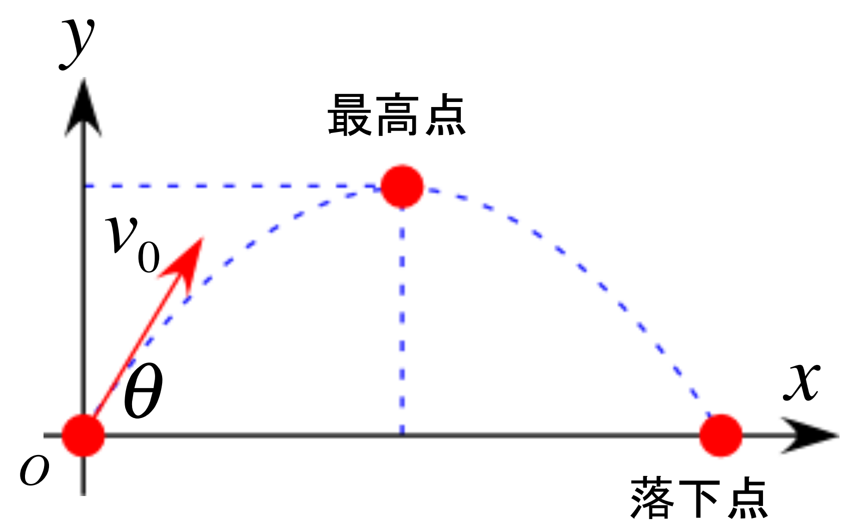
放物線

$$= \left[\tan\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x \right] x$$

$y = 0$ とすると

$$x = 0$$

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$



の2点となり、それぞれ原点と落下点となる。

放物運動の確認

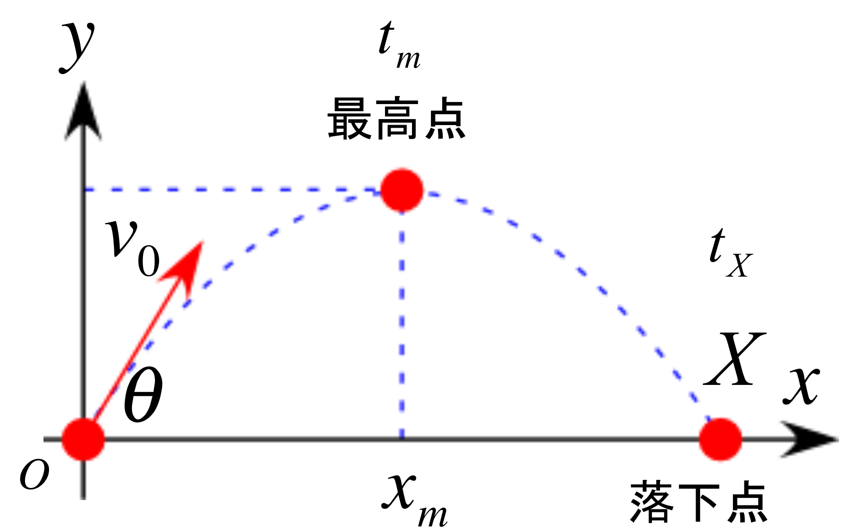
落下点の達した時刻 t_X は

$$t_X = \frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{1}{v_0 \cos\theta} \frac{2v^2{}_0 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$= \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

対称性より最高点の時刻 t_m は

$$t_m = \frac{t}{2} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$



このときの座標は

$$x_m = \frac{X}{2} = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$y(t_m) = \left(v_0 \sin\theta\right) t_m - \frac{1}{2} g \cdot t_m{}^2$$

$$= \left(v_0 \sin\theta\right) \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} \right)^2$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

放物運動～飛距離最大

飛距離最大となる初速度の角度 θ_0 を考える

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

これが最大値になるのは $\sin 2\theta_0$ が最大値になるときで、その最大値は 1 である。

このとき、

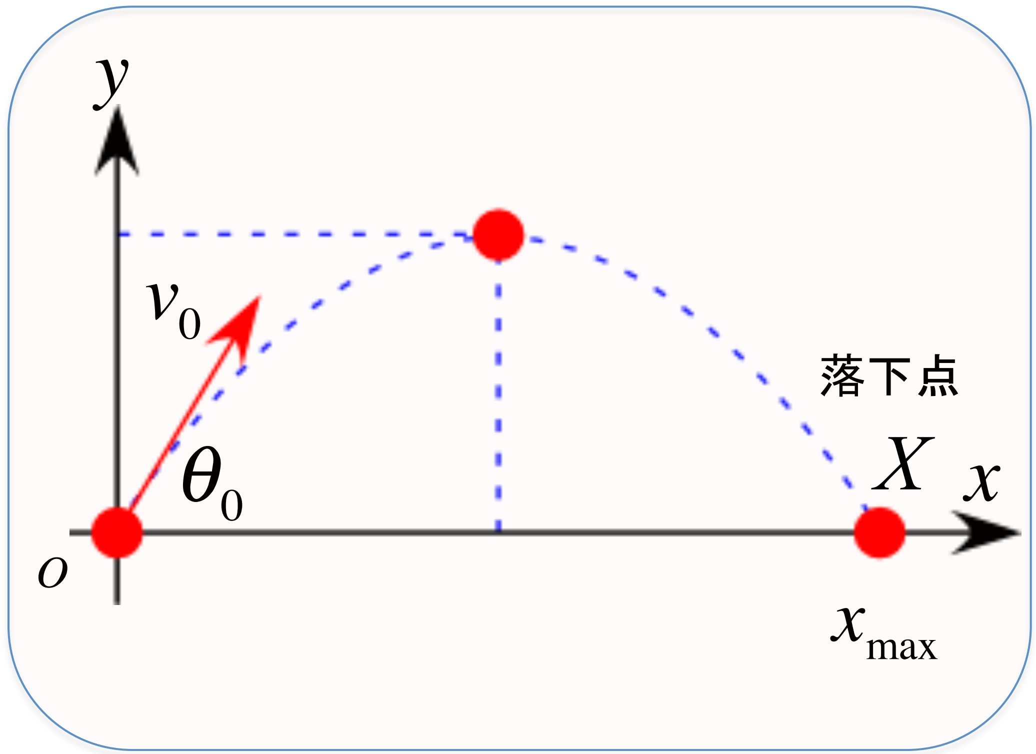
$$2\theta_0 = 90^\circ$$

となるので $x_{\max}$ となる放出角度は

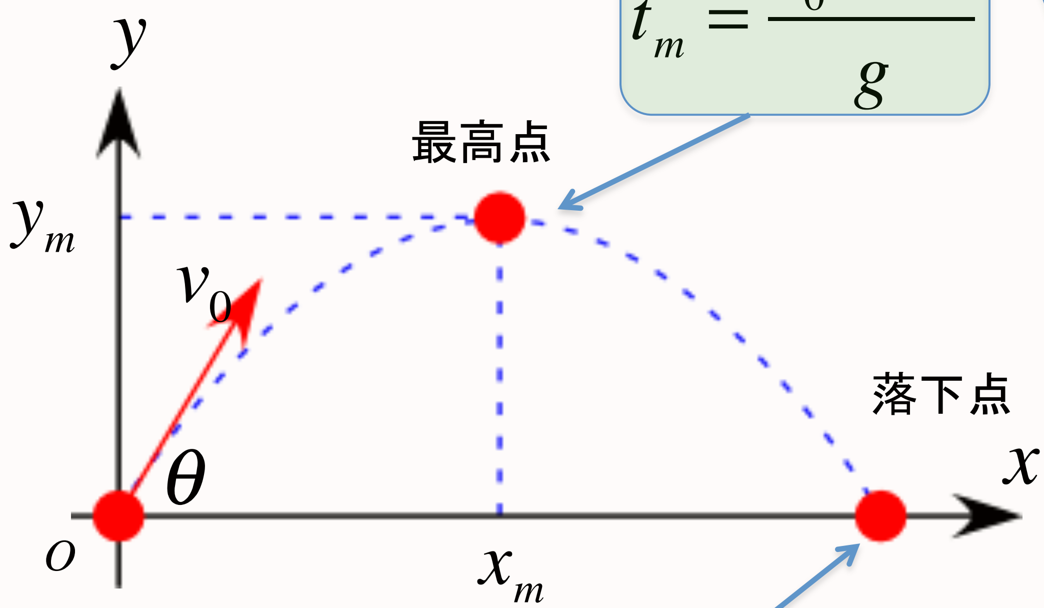
$$\theta_0 = 45^\circ$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

である。



$$t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$



$$x = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

力〜様々な力

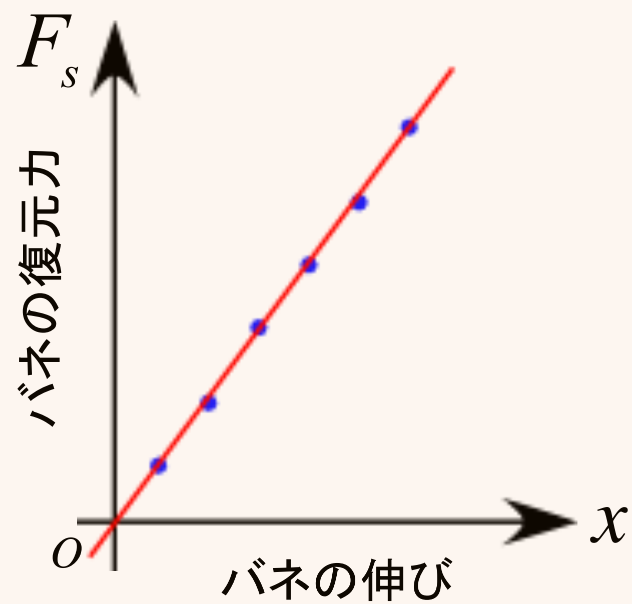
重力

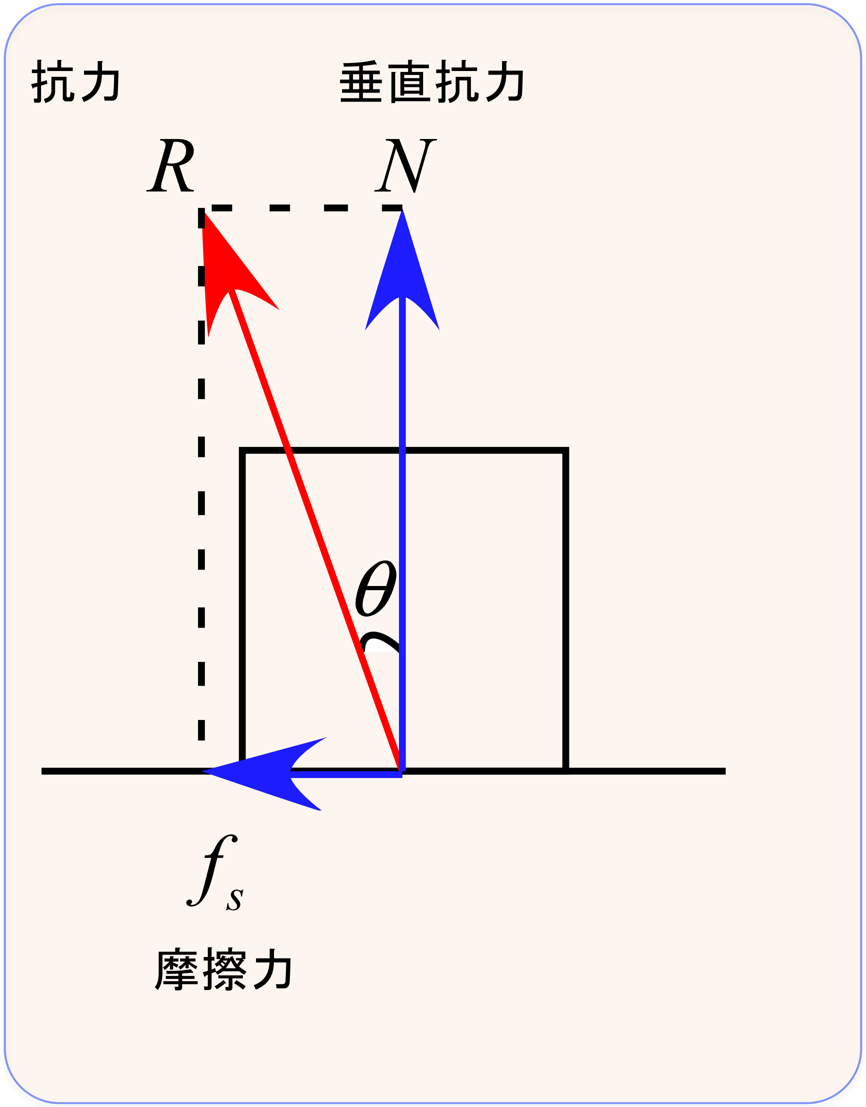
$$F_g = mg \qquad g = 9.8 \ [\mathrm{m/s^2}]$$

バネの弾性力

フックの法則 (実験式)

$$F_s = kx \qquad \text{バネ定数 } k$$

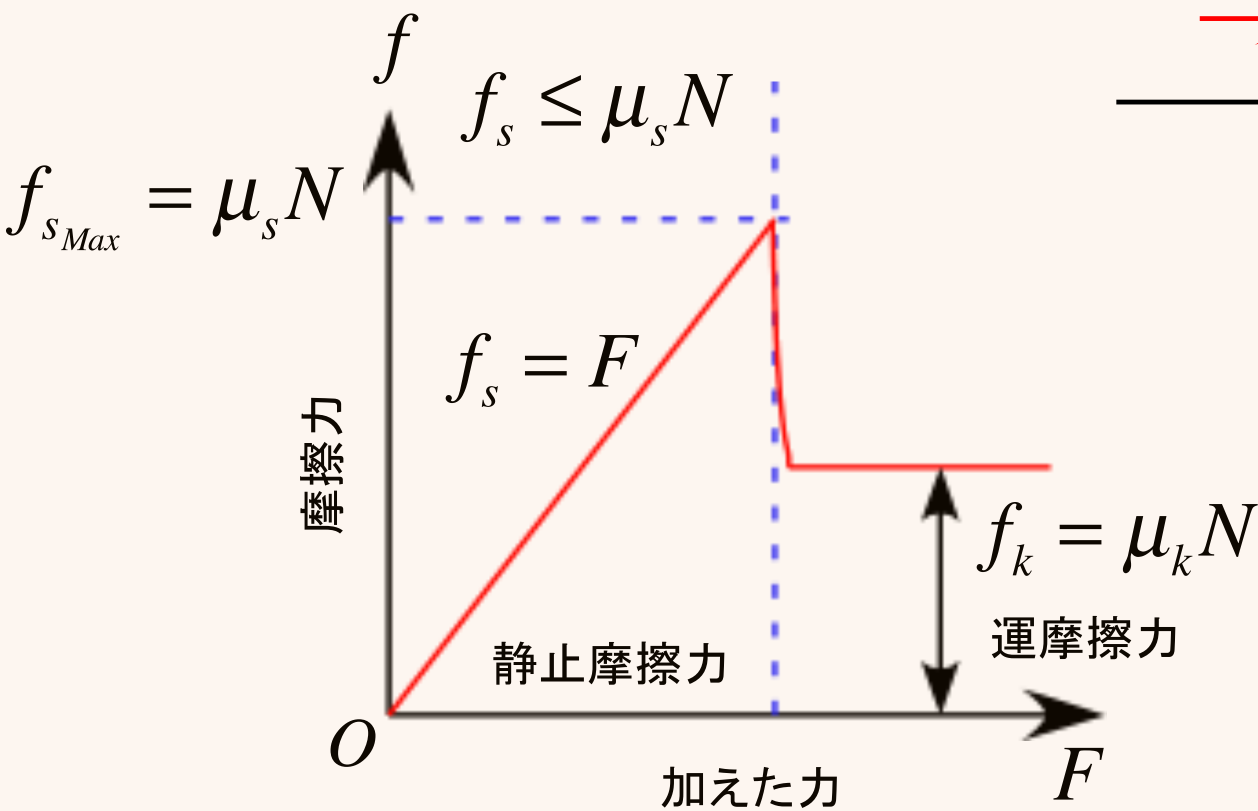


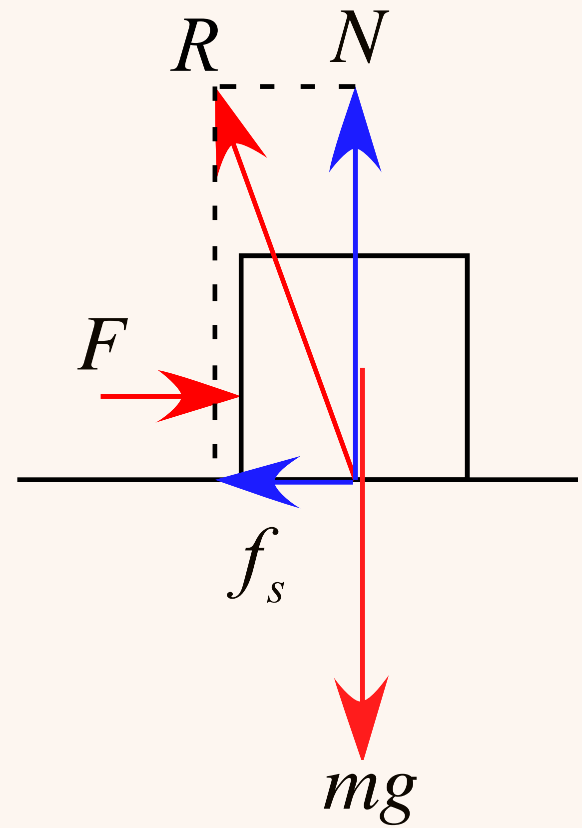


$$\mu = \tan\theta = \frac{f_s}{N}$$

摩擦力 f

接触している2つの面の間の摩擦力





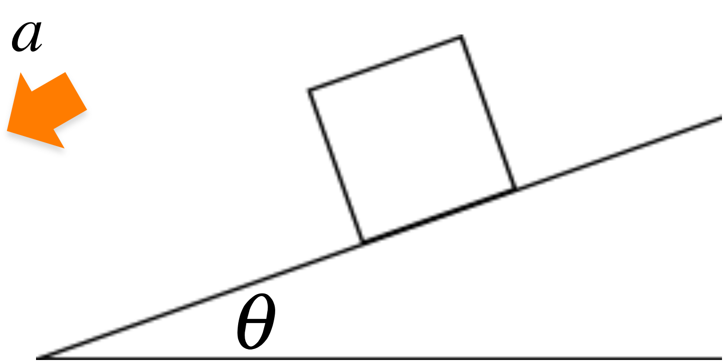
静止摩擦係数: μ_s

動摩擦係数: μ_k

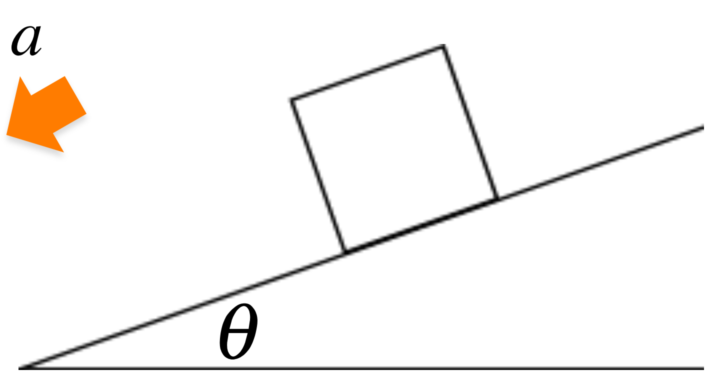
力～運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

1. 質量 m の物体が斜面を滑り降りる (摩擦なし)



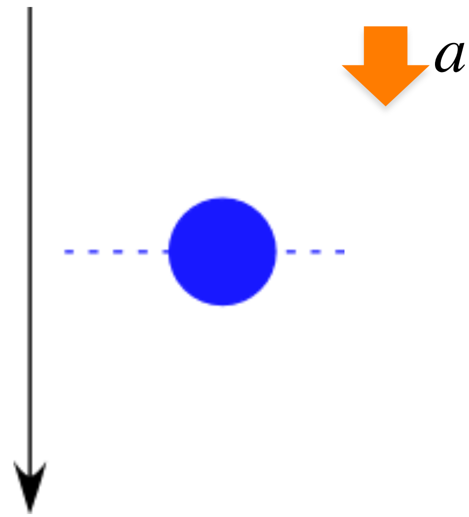
2. 質量 m の物体が斜面を滑り降りる (摩擦力 f あり)



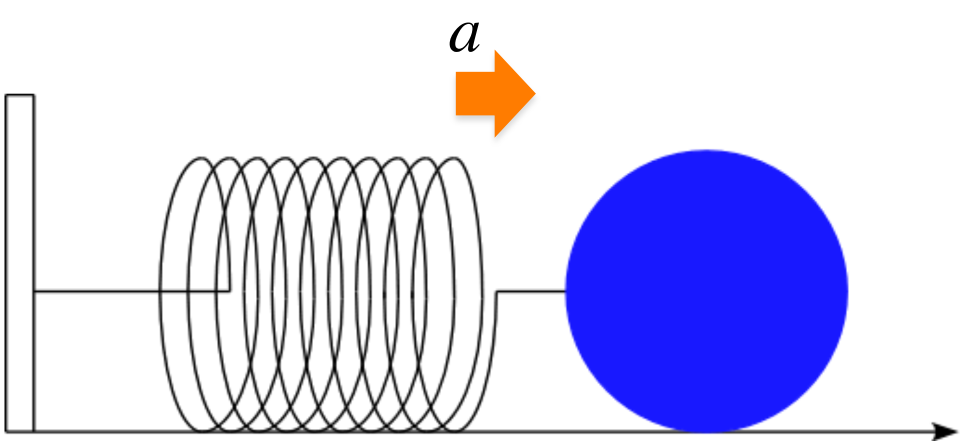
力〜運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

3. 質量 m 雨滴が落下する (空気の抵抗力の大きさは kv)



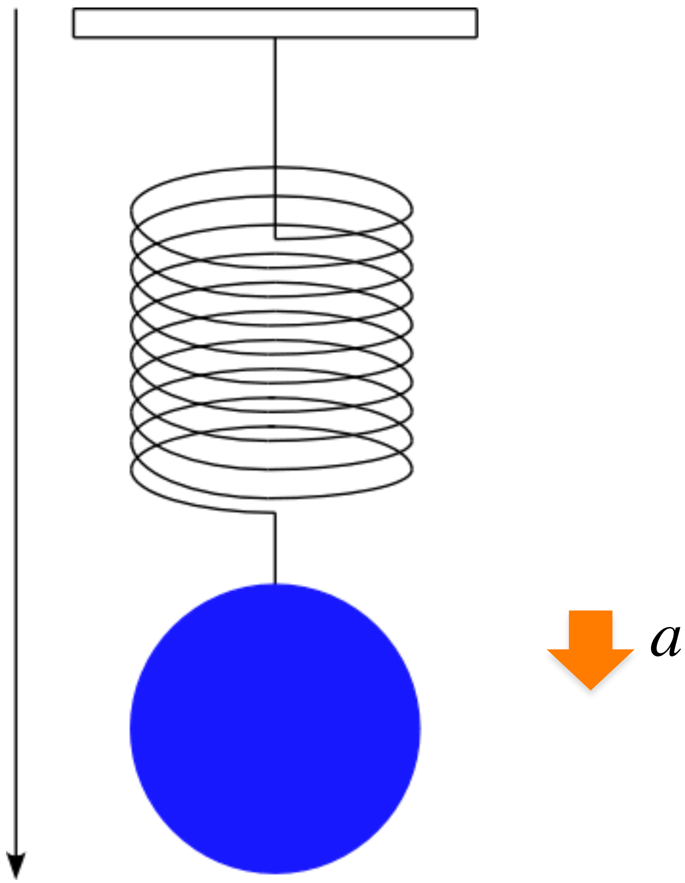
4. バネに質量 m の物体がついている (バネの復元力は f_s とし、床との摩擦なしとする)



力〜運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

5. バネに質量 m の物体がついている (バネの復元力は f_s とする)



力～運動方程式

水平とθの角をなす斜面上に帆のついたそりを置き、そりが斜面に沿って
すべり落ちる運動を考える。
そりの質量をM, 動摩擦係数をμ, 重力加速度をg, とする。
そりには帆が張ってあり、そりの速さに比例した抵抗力がはたらくとする。
比例定数をk, として、以下の問いに答えよ

1. そりの速度が$v(t)$になったときのそりの加速度を$\alpha(t)$として、運動方程式を書け。

2. この運動の$v-t$グラフを書け。

3. そりが等速運動するようになったときの速度を求めよ。

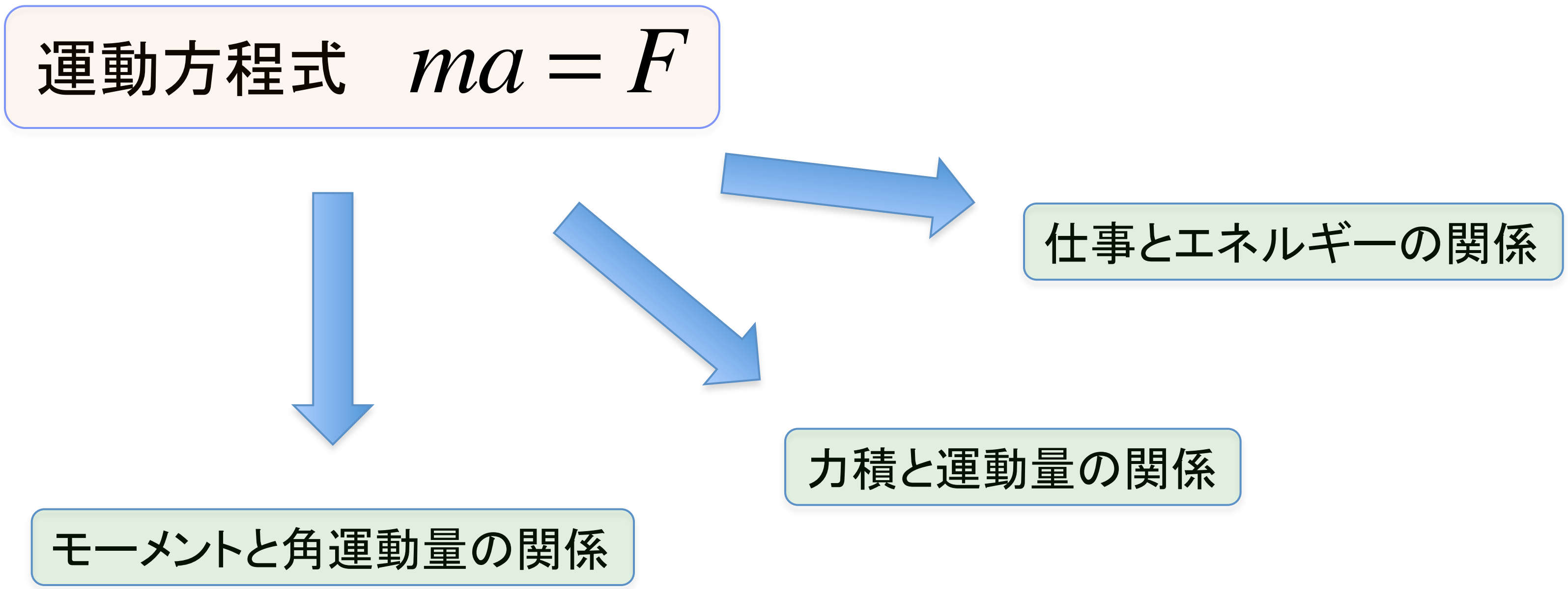
力～運動方程式

質量 m の質点が時間に依存する力 $F = kt^2$ を受けて運動している。
以下の問いに答えよ。
但し、$k > 0$, 定数とし、運動は一直線上の運動であるとする。

1. $t = 0$ から $t = t$ までの間の速度増加量 Δv を求めよ。

2. $t = 0$ から $t = t$ までの間の質点の移動距離 Δx を求めよ。
   (初速度をv_0として用いてよい。)

運動方程式から導かれる関係



仕事とエネルギーの関係

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を、xで積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int Fdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int Fdx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

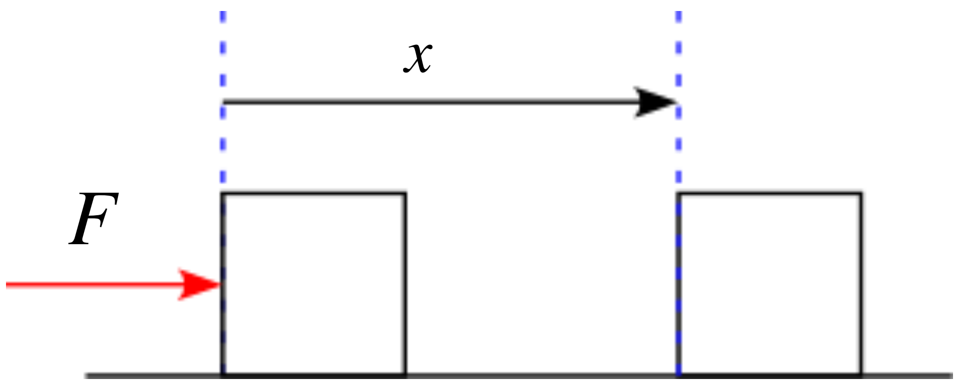
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事とエネルギー

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き

物体に力を加えて、
物体を移動させる事



定義

力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

と定義される。

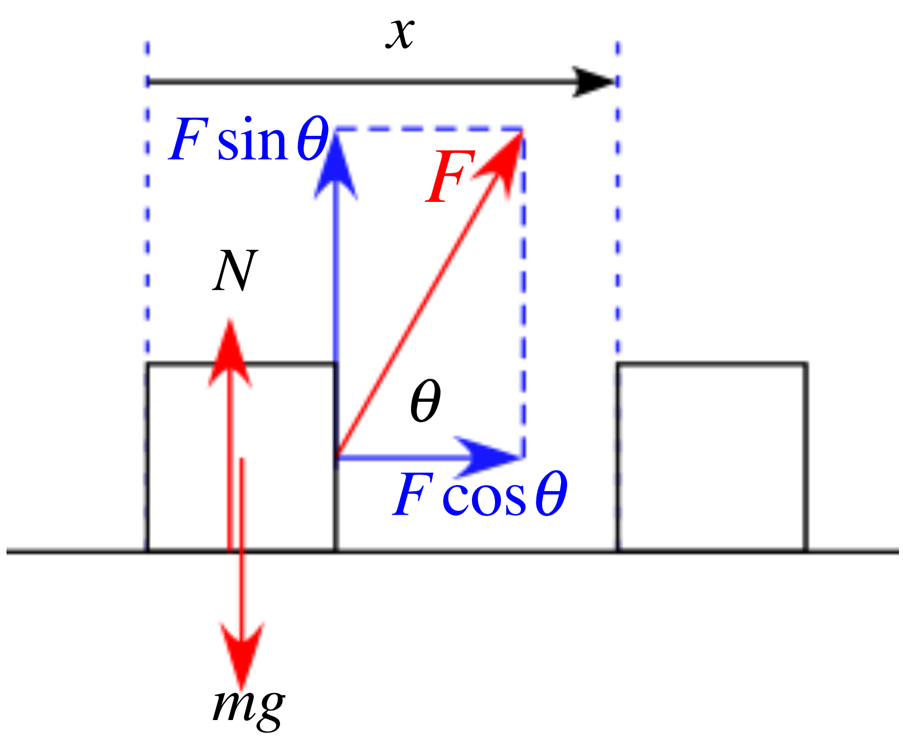
「力 F が物体に仕事 W をした」

「物体は力 F に仕事 W をされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]}[L] = \frac{[L^2M]}{[T^2]}$$

斜め上に引っ張る



移動方向の力だけが仕事をする

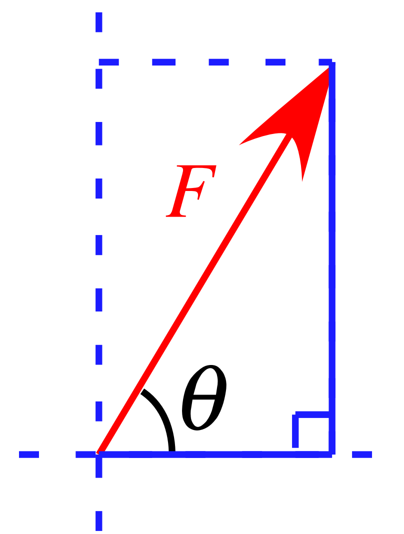
$$W = F\cos\theta \cdot x$$

物体に作用する力

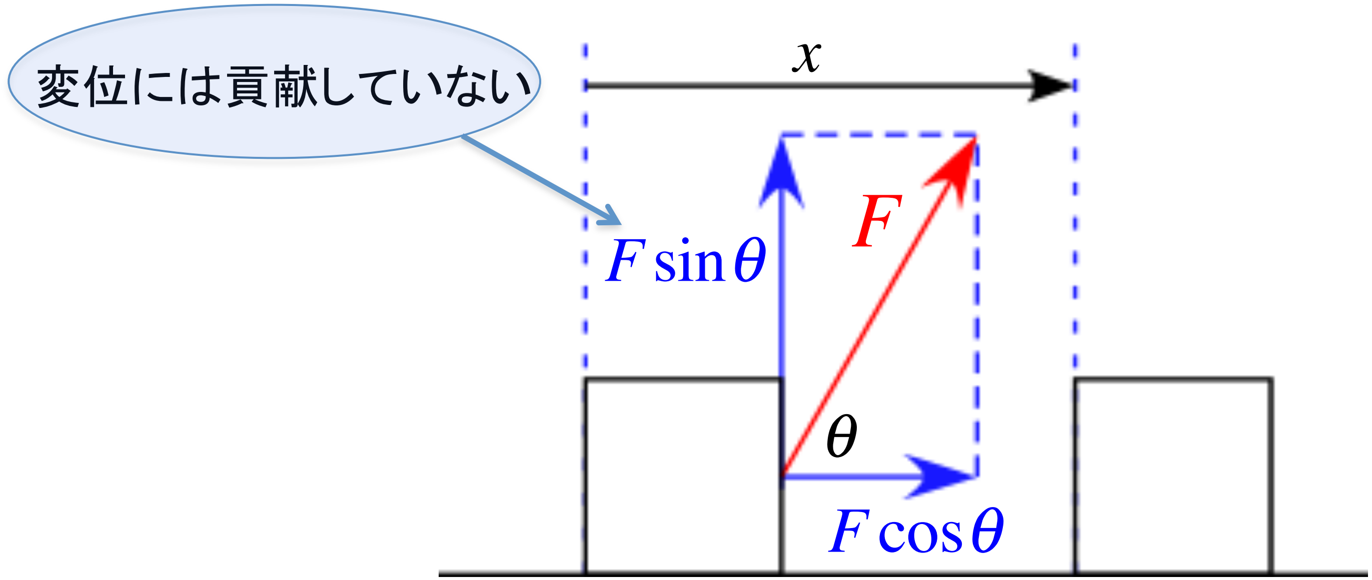
場の力：重力 mg
接触力：張力 F
垂直抗力 N

仕事をしていない

垂直抗力：N
場の力：重力 mg
F の y 成分：$F\sin\theta$



斜め上に引っ張る場合



力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

$$W = F\cos\theta \cdot x = Fx\cos\theta$$

仕事

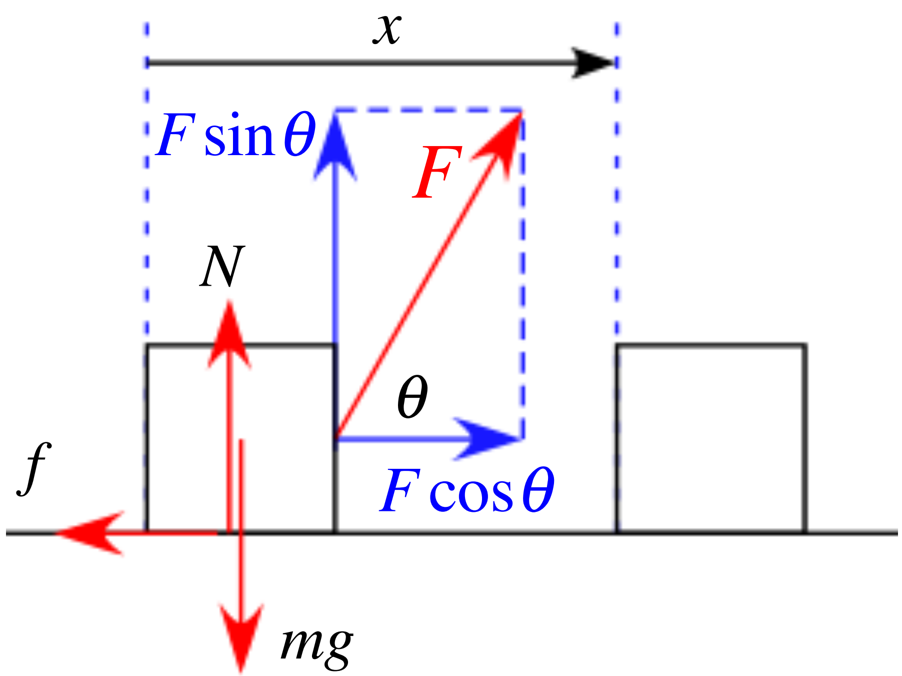
作用した力×距離

・力の向きと移動方向が同じ場合：$W = Fx$

・力の向きと移動方向が θ の角をなす場合：$W = Fx\cos\theta$

仕事～摩擦力

斜め上に引っ張る + 摩擦力を考慮する場合



移動方向の力だけが仕事をする

摩擦力 f は右向きに移動することに対して邪魔をしている

負の仕事

物体に作用する力

場の力 : 重力 mg
接触力 : 張力 F
垂直抗力 N
摩擦力 f

仕事をしていない

垂直抗力 : N
場の力 : 重力 mg
F の y 成分 : $F\sin\theta$

正の仕事 : $W_1 = F\cos\theta \cdot x$

負の仕事 : $W_2 = -f \cdot x$

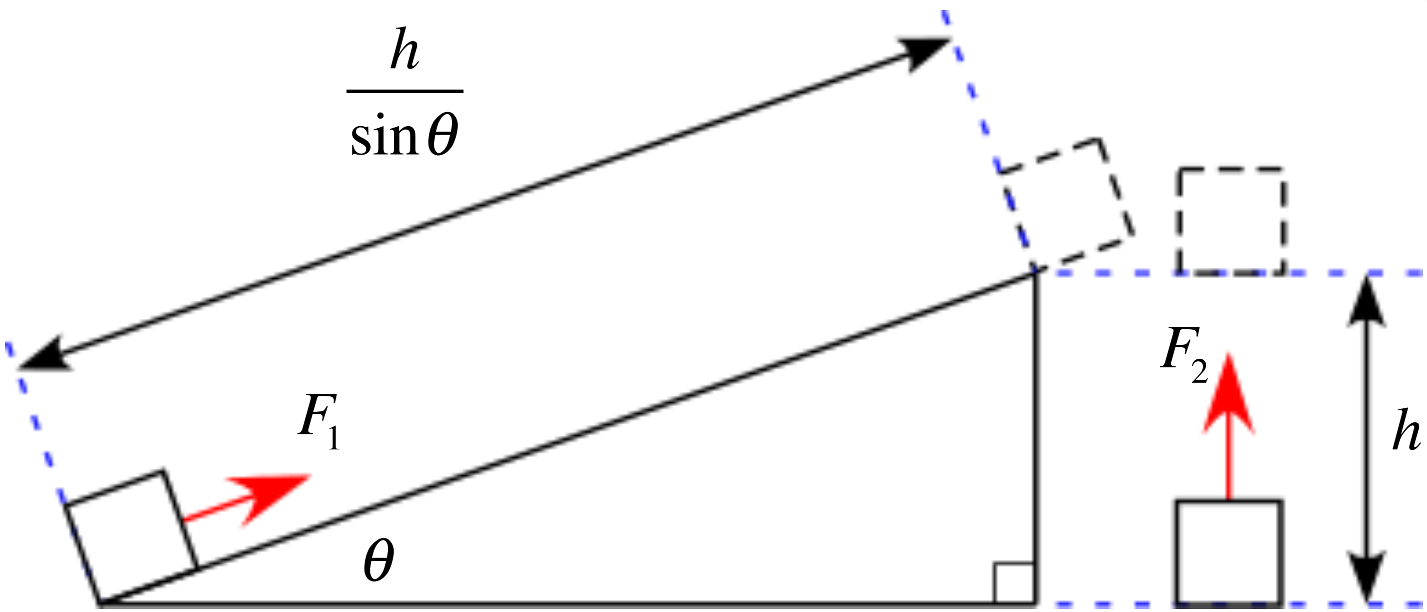
仕事の原理

たとえ、どんなに便利な道具を用いて物体を動かすのに必要な力を小さくしても、決して仕事で得することは無い。

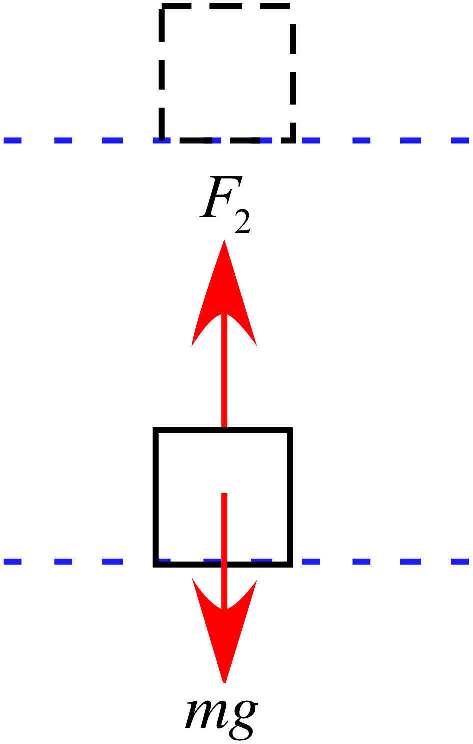
例

質量 m の物体を持ち上げるために必要な仕事量をそれぞれ考える。

ゆっくり動かす



真上に引き上げる場合



物体を持ち上げる為には

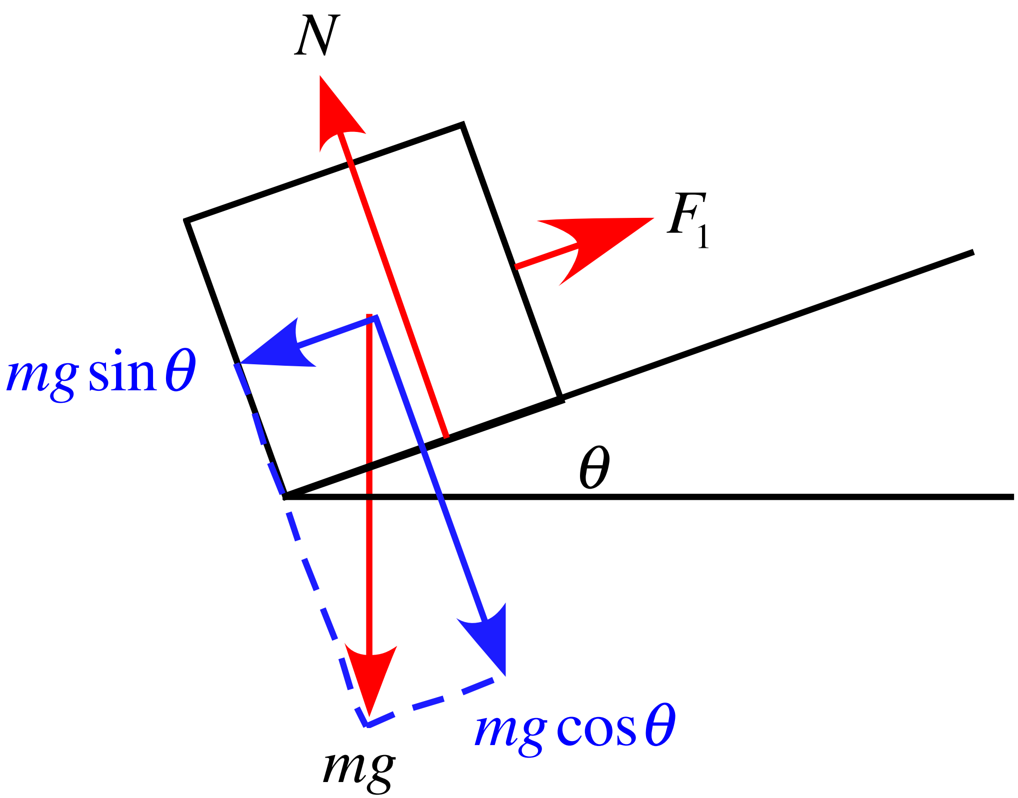
$$F_2 = mg$$

が必要である。

この時の仕事は

$$W_2 = F_2 \Delta x = mgh$$

斜面に沿って引き上げる場合



物体を引き上げる為には

$$F_1 = mg\sin\theta$$

が必要である。

この時の仕事は

$$W_1 = F_1\Delta x = mg\sin\theta\cdot\frac{h}{\sin\theta}$$

$$= mgh$$

従って

$$W_1 = W_2$$

となり、仕事としては同じになる。

仕事の原理

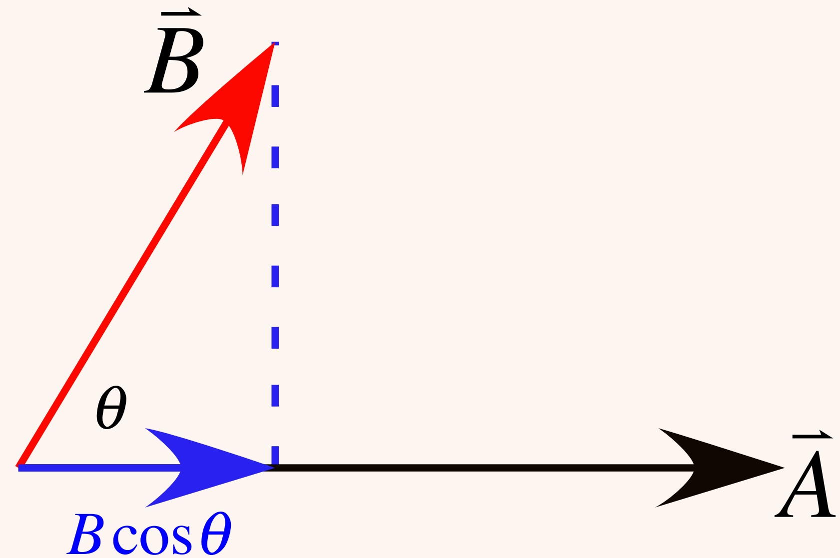
道具は、必要な力を小さくすることはできるが、仕事の量は変わらない。

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

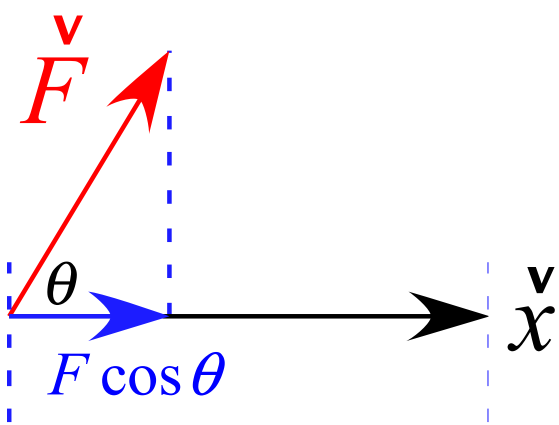
$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$



これを仕事に応用すると

$$\vec{F}\cdot\vec{x} = Fx\cos\theta$$



つまり、

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$

仕事～線積分

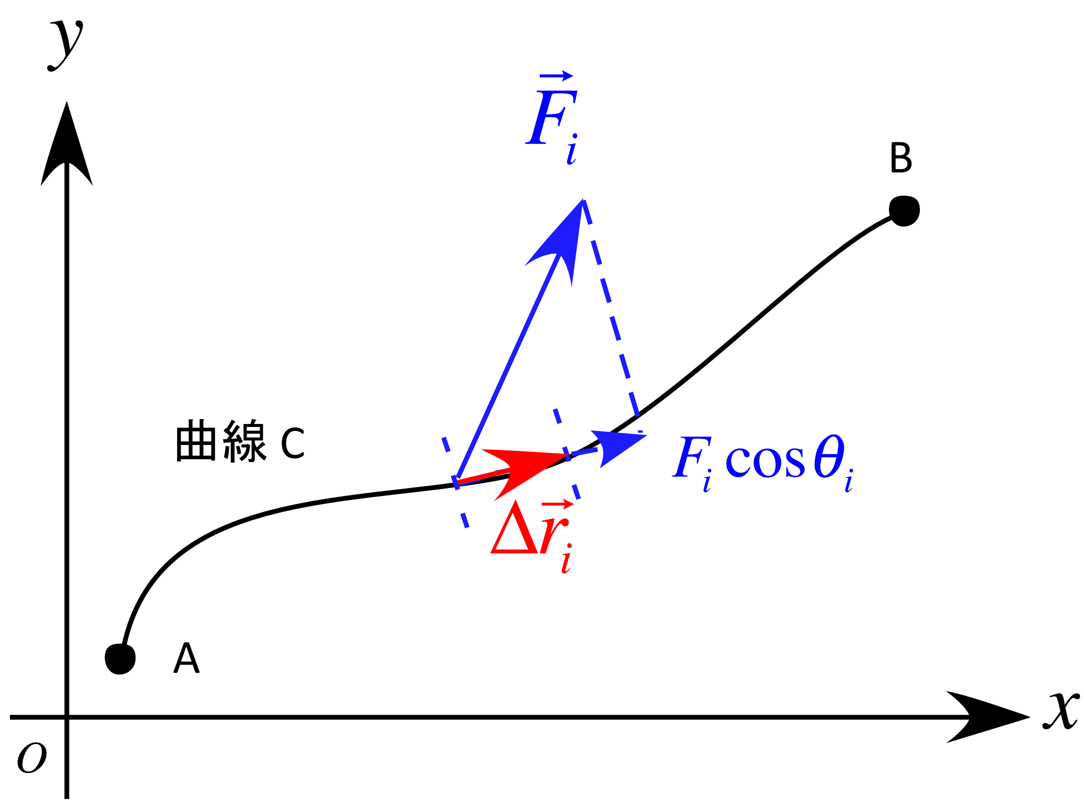
微小距離 $\Delta\vec{r}_i$ だけ移動

したとすると

$$\Delta W_i = F \cdot \Delta r_i \cos\theta_i$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i$$

となる。



$\Delta\vec{r}_i$ を限りなく小さくすると

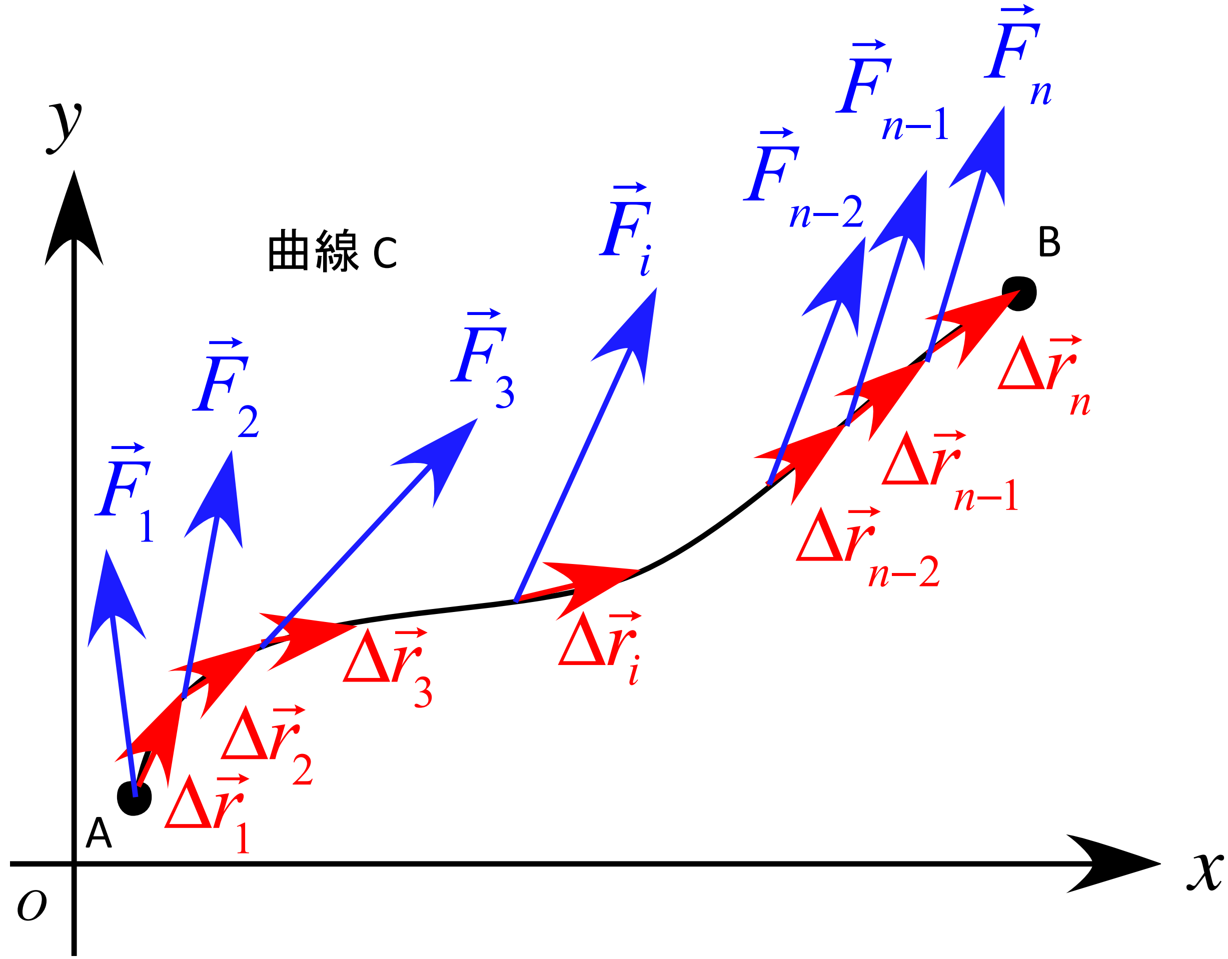
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

これを区間で積分すると

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

となる。

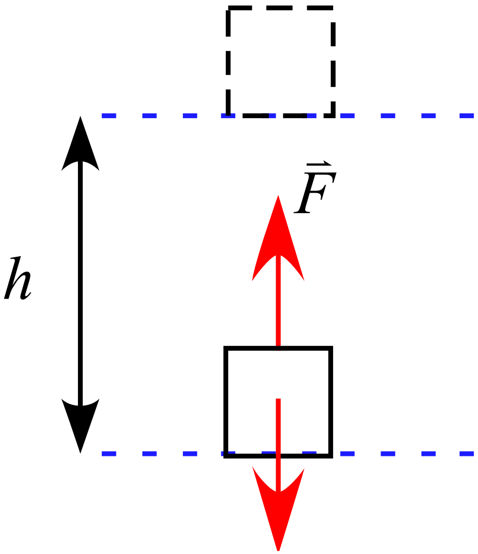
線積分

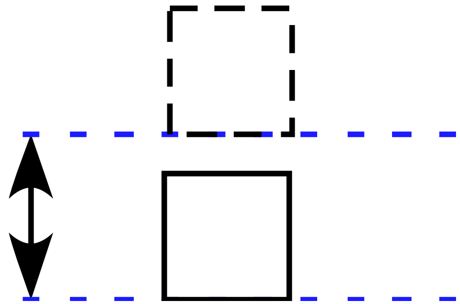


「仕事」は「力の距離積分」で計算することができる

仕事〜積分計算

重力 $F = mg$ (一定) における仕事

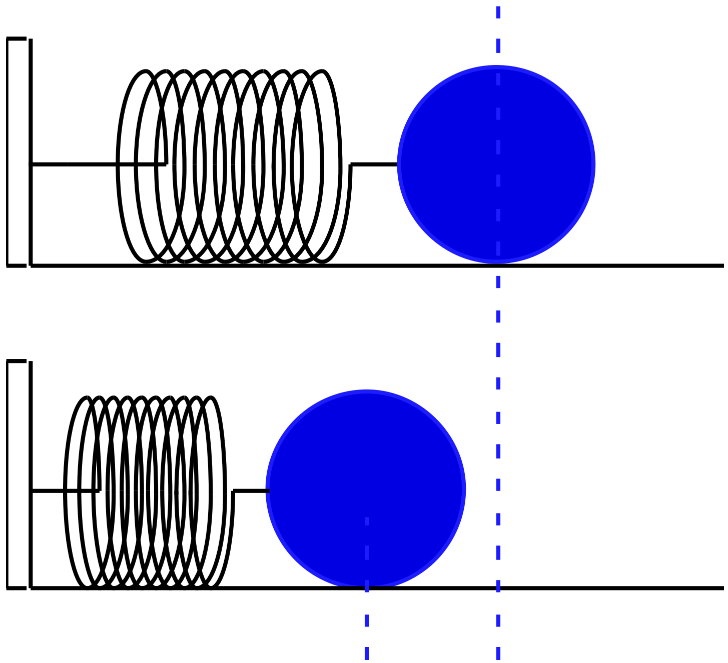




$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^h mg\, dx = mg[x]_0^h = mgh$$

仕事～積分計算

バネを x だけ縮めたときの弾性力 $F = kx$ における仕事



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^x kx\,dx = k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2$$

仕事率

定義

仕事率 : 単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

国際単位 : ワット　[W =J / S]

1 秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L]\frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

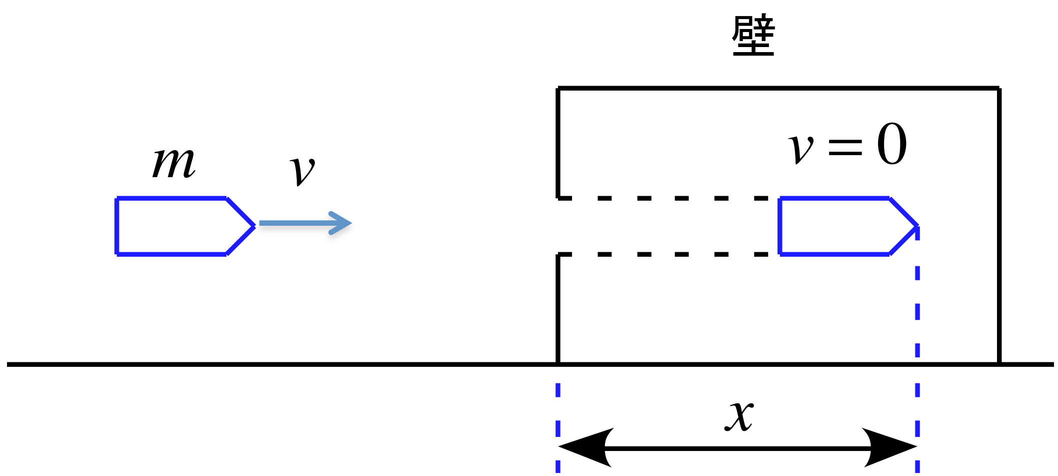
エネルギー

ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという

仕事をする能力＝エネルギー

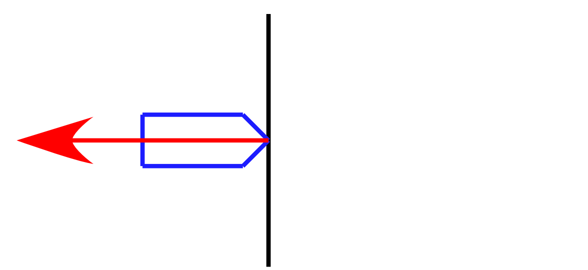
例

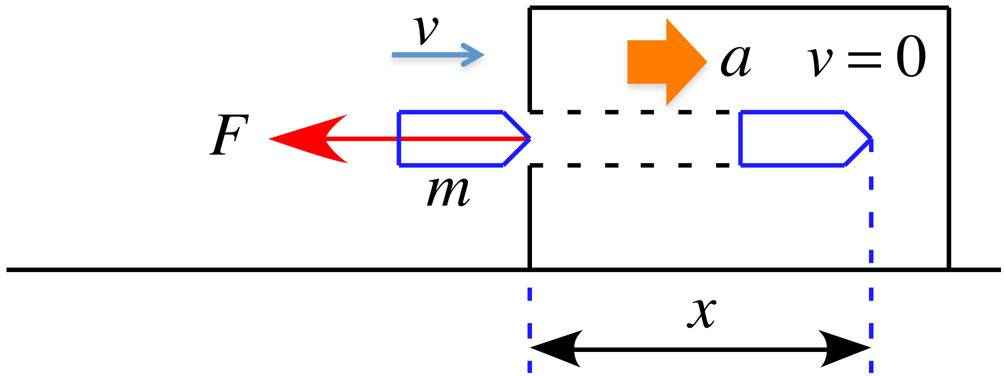
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





等加速度運動なので

$$0^2 - v^2 = 2ax$$

が成立する。

運動方程式は

$$ma = -F \quad a = -\frac{F}{m}$$

よって

$$0^2 - v^2 = 2\left(-\frac{F}{m}\right)x$$

エネルギー〜運動エネルギー

両辺に $\frac{m}{2}$ をかけてみると

$$\boxed{\frac{1}{2}m\cdot 0^2} - \boxed{\frac{1}{2}m\cdot v^2} = \frac{1}{2}m\cdot 2\left(-\frac{F}{m}\right)x = \boxed{-Fx}$$

最後の運動能力　　最初の運動能力　　弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

[J = kg m^2 / s^2]

次元

$$[M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

エネルギー～位置エネルギー

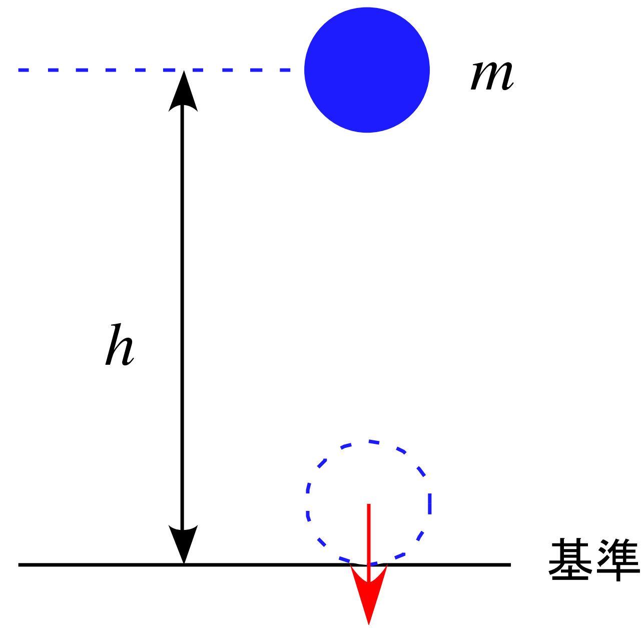
重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた

下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

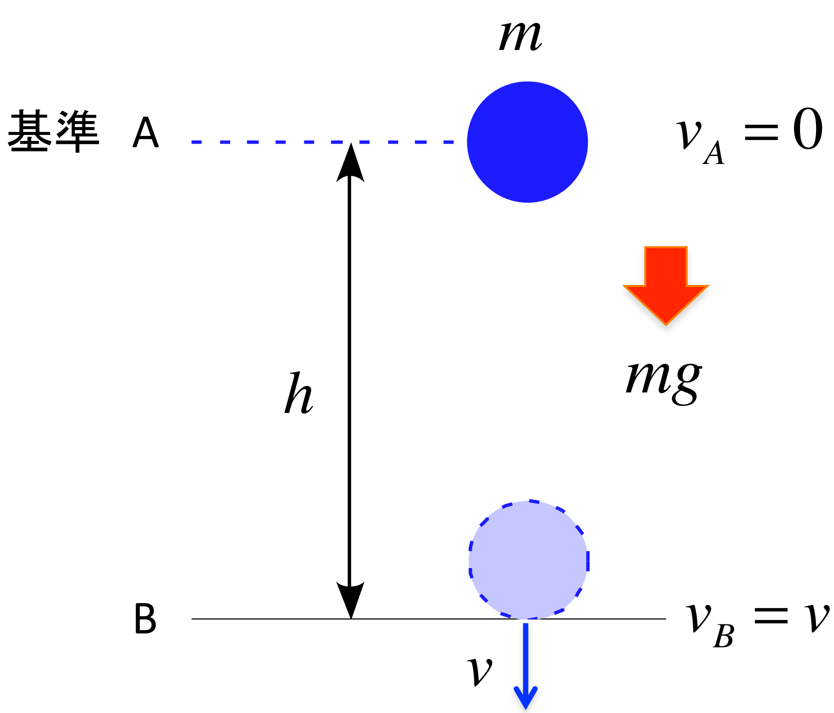
$$U = mgh$$ [J = kg m² / s²]

基準からの高さに比例

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

運動エネルギーと位置エネルギー



外力の仕事

重力 mg が物体を
h だけ引きずりおろした

仕事をした

B点で運動エネルギーを
持つことができた

これを式で表すと

$$mg \cdot h = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

外力の仕事　運動エネルギーの変化

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

運動エネルギーの変化は外力の仕事による

エネルギー保存則

この式は、高さ h の位置エネルギーが運動エネルギーに変換されたとも考えられる

$$\boxed{mgh} = \boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

位置エネルギー　運動エネルギー

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

(重力場の運動)

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

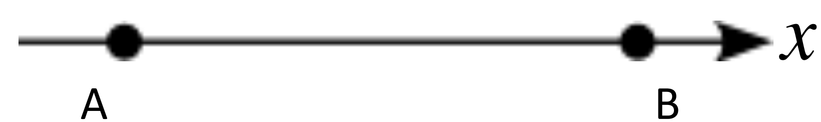
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = 0 \qquad x(t_2) = x$$



$t = t_1$ $t = t_2$

と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} = \boxed{\int_0^x Fdx}$$

エネルギーの変化量

$x = 0$ から x まで
物体に働く力 F がした仕事

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$ をかける → 単位時間あたりの変位をかけた

$$m{\color{red}v}\frac{dv}{dt} = F{\color{red}\frac{dx}{dt}}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する → 最初から最後まで時間に対して和を取る

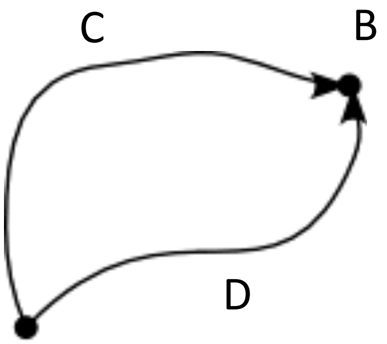
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

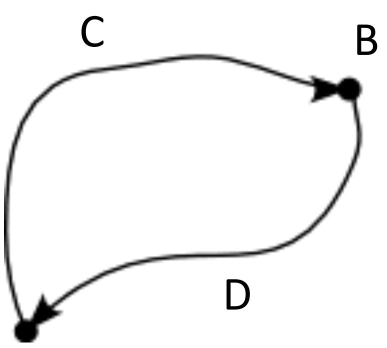
最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路





点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える

ここでの運動が保存力による運動とすると

点A – C – 点Bの経路を通り、
そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A – D – 点Bの経路を通り、同じ道を通って
点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

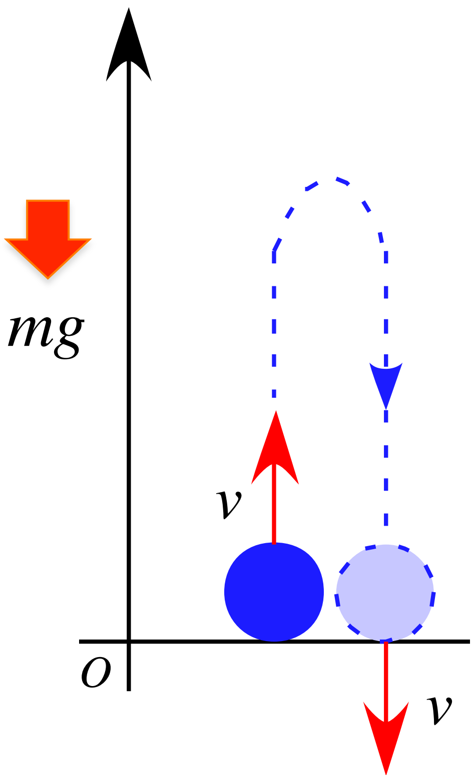
よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える



鉛直投げ上げ運動

この運動における仕事は

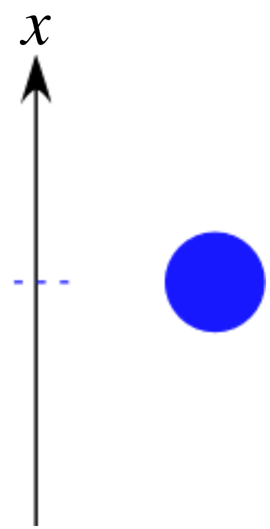
$$W = \int_0^0 F dx = \int_0^0 (-mg) dx = 0$$

元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる

保存力

エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}(-mgx)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + mgx$ は時間に対して

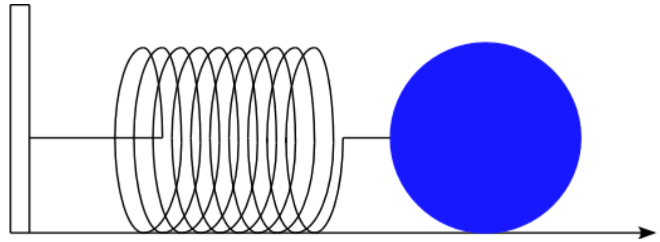
変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = \text{一定}$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

バネの単振動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ は時間に対して

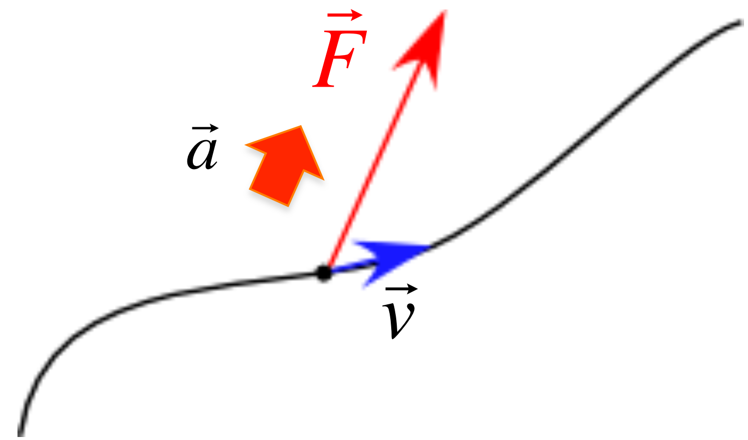
変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定}$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

運動量～定義

質量 m の質点が力 F を受けて運動している



運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

加速度の定義から

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

であるから、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\boxed{(m\vec{v})} = \vec{F}$$

運動量

ここで、$\vec{p} = m\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となる。

運動量〜力積

運動量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量 = 質量 × 速度

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

単位時間あたりの
運動量の変化

この式を書き換えると

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

運動量の
微小変化

力積

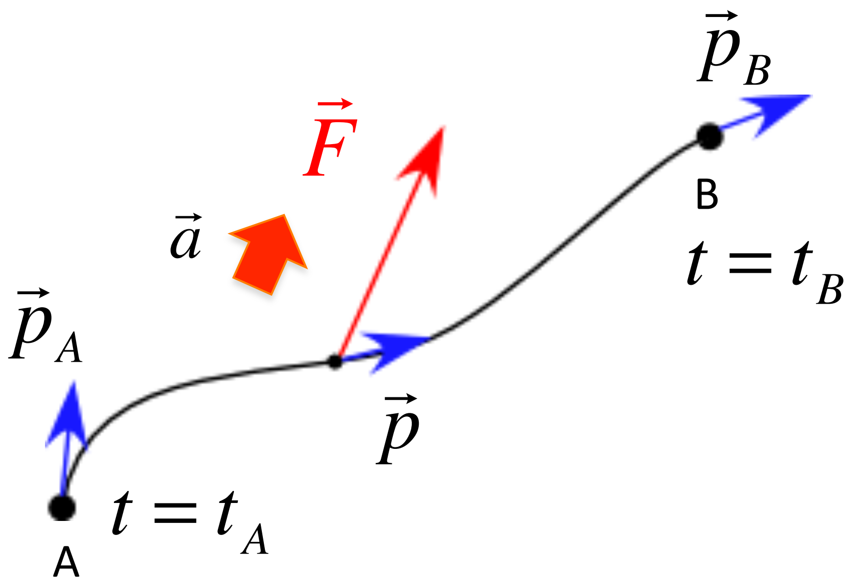
力 $\vec{F}$ が微小時間
dt だけ働いた

次元

力積

$$\check{I} = \check{F}dt \qquad \left[\frac{ML}{T^2}\right][T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

運動開始と運動終了を図のように設定する



$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

積分すると

$$\int_{p_A}^{p_B} d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\,dt$$

$$\underbrace{\boxed{\vec{p}_B - \vec{p}_A}}_{\text{運動量の変化}} = \underbrace{\boxed{\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\,dt}}_{\text{受けた力積の総和}}$$

運動量〜エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか？)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}\, dt$$

力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか？)

運動量の変化は力積による

力積と運動量

衝突したときの運動方程式は

$$MA = F$$

加速度の定義から

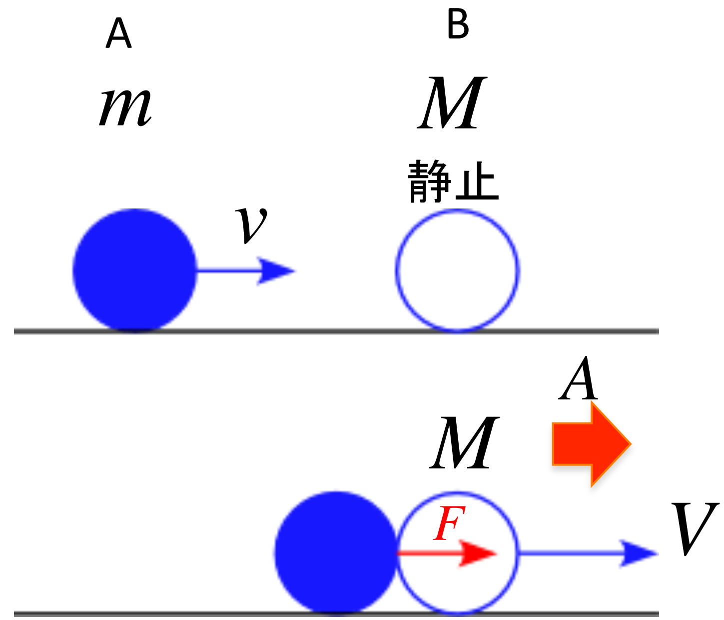
$$A = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

となるので

$$M\frac{\Delta V}{\Delta t} = F$$

両辺を Δt 倍すると

$$M\frac{\Delta V}{\Delta t}\Delta t = F\Delta t$$



$$M\Delta V = F\Delta t$$

速度変化は $\Delta V = V - 0$ なので

$$\underbrace{M(V-0)}_{\text{運動量の変化}} = \underbrace{F\Delta t}_{\text{力積}}$$

となる

運動量～保存則

物体が衝突した前後について
考えてみよう

運動方程式はA, Bそれぞれ

A： $ma = -F$

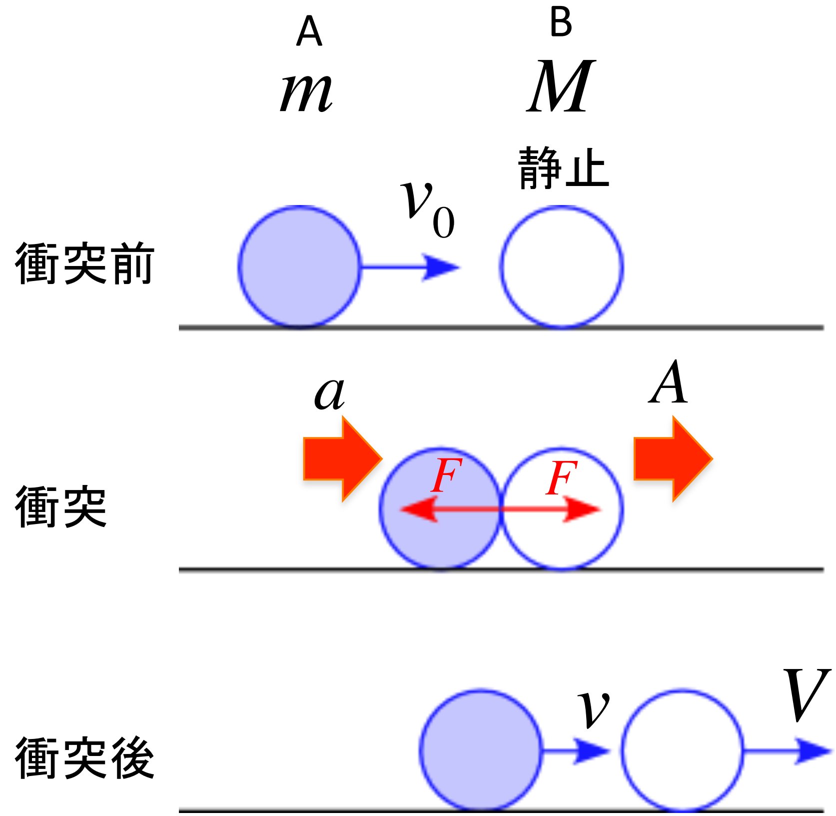
B： $MA = F$

加速度の定義から、それぞれ

A： $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

B： $A = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$

となるので、運動方程式は



運動量～保存則

A： $$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=-F$$

B： $$M\frac{\Delta V}{\Delta t}=F$$

となる
ここで、前後の速度を適用すると

A： $$m\frac{v-v_0}{\Delta t}=-F$$

B： $$M\frac{V-0}{\Delta t}=F$$

従って

A： $$m\left(v-v_0\right)=-F\Delta t$$

B： $$M\left(V-0\right)=F\Delta t$$

この2式の和をとると

$$m\left(v-v_0\right)+M\left(V-0\right)=0$$

さらに式変形すると

$$\underbrace{\boxed{mv+MV}}_{\text{衝突後の運動量}}=\underbrace{\boxed{mv_0+M\cdot 0}}_{\text{衝突前の運動量}}$$

運動量が保存している

運動量保存則

運動量保存則

外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない

$$mv + MV = mv_0 + MV_0$$

衝突後の全運動量　　衝突前の全運動量

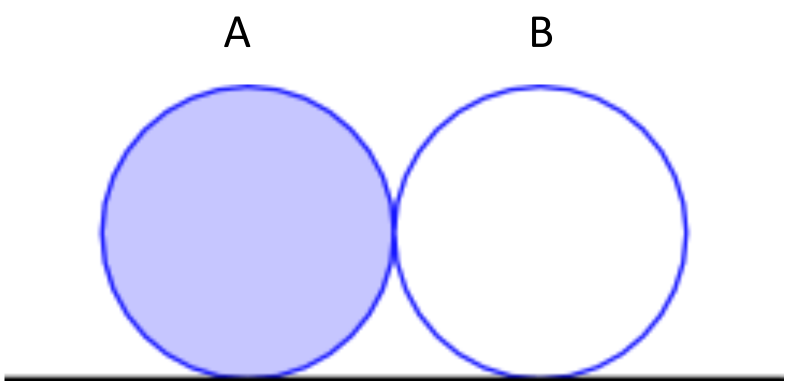
運動量保存則～例題

例題

２球の正面衝突を考える。

1. 衝突した瞬間の力を図に書き込め。

2. この運動で運動量が保存していることを示せ。

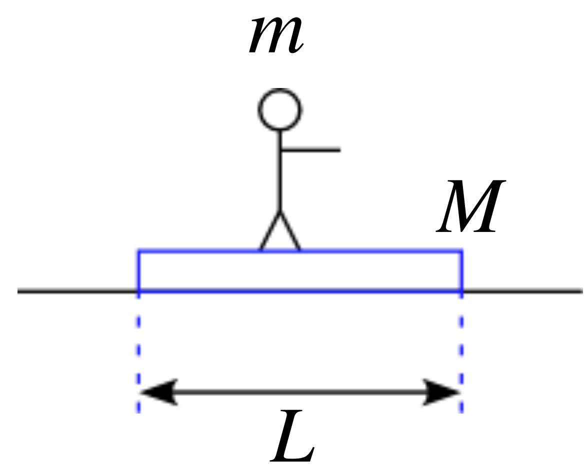


運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上に質量 M、長さ L の板がある。

この板の上を質量 m の人が端から端まで歩くとする。



1. この運動に作用する力を図に書き込め。

   但し、板が人から受ける水平方向の力を F とする。

2. この運動で人と板の運動方程式を書け。

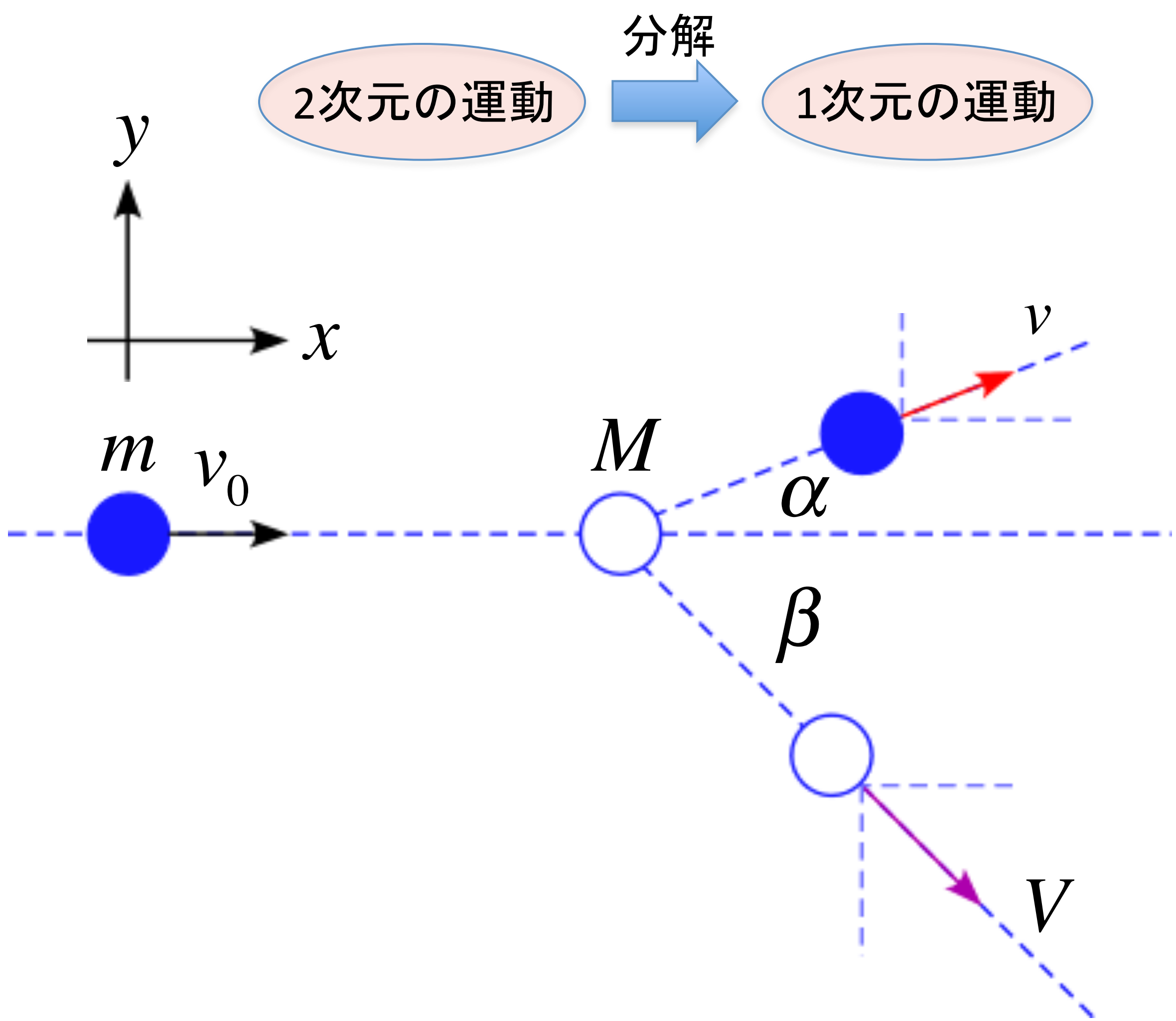
   但し、板の変位 $x_1(t)$ 、人の加速度　$x_2(t)$ とする。

3. 初速度 $v_0 = 0$ のとき、板の移動距離を求めよ。

斜衝突

斜衝突 (ビリヤード)

静止している白球に青玉を完全弾性衝突させる運動 (床との摩擦は無いとする)



外から外力が加わっていない → 前後の運動量については保存している

運動量保存則より

x 方向 : $mv_0 + M \cdot 0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$

y 方向 : $m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$

x 方向 : $mv_0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$

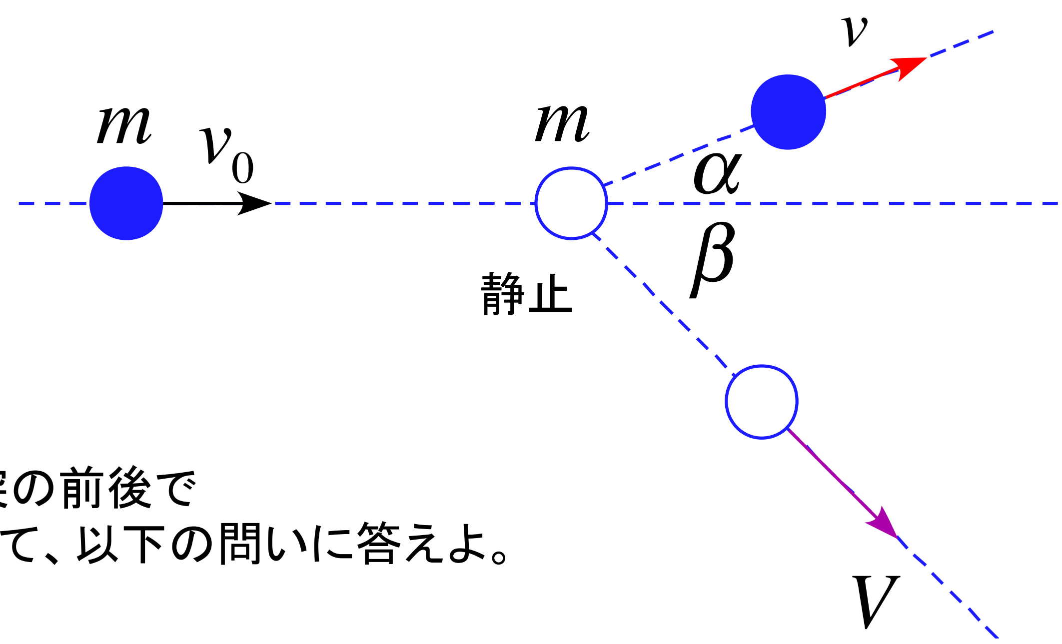
y 方向 : $0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$

完全弾性衝突 → 前後でのエネルギーロスは無い

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

斜衝突～例題

斜衝突において、質量が同じであるとする。



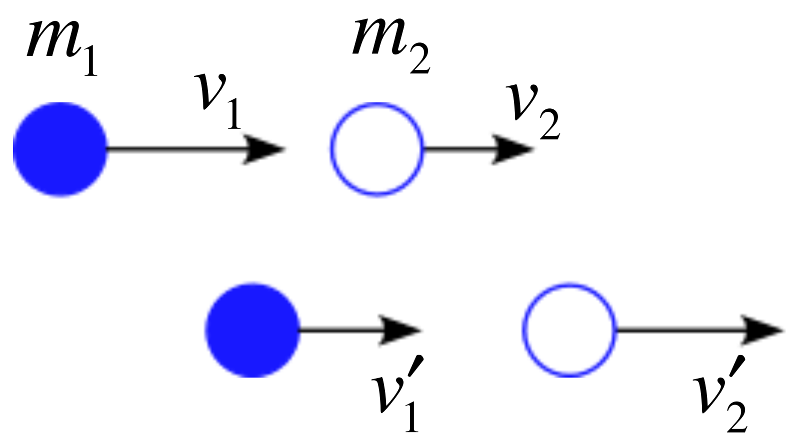
衝突は弾性衝突であり、衝突の前後で
エネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

1. 図の角 $\alpha+\beta$ を求めよ。

2. 速度比 $\dfrac{v}{V}$ を β を使って表せ。

反発係数

1次元の衝突



運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

であるが、速度の情報が不十分である
そこで

同じ2物体の衝突では、
衝突前後の相対速度の大きさの比は一定

(経験的法則)

を用いてその比率を定義すると

反発係数 (跳ね返り係数) e

$$e = -\frac{\boxed{v_1' - v_2'}}{\boxed{v_1 - v_2}}$$

衝突後の相対速度

衝突前の相対速度

反発係数

2体の相対運動のエネルギーの変化を考えると

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1' - v_2'\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2\left(e^2 - 1\right)$$

完全弾性衝突: $e = 1$　理想的によく弾む場合 → エネルギー保存則が成立

非弾性衝突: $0 \leq e < 1$

完全非弾性衝突: $e = 0$　2物体が一体になる場合

運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたり m_0 の物質を噴出しながら運動する物体がある

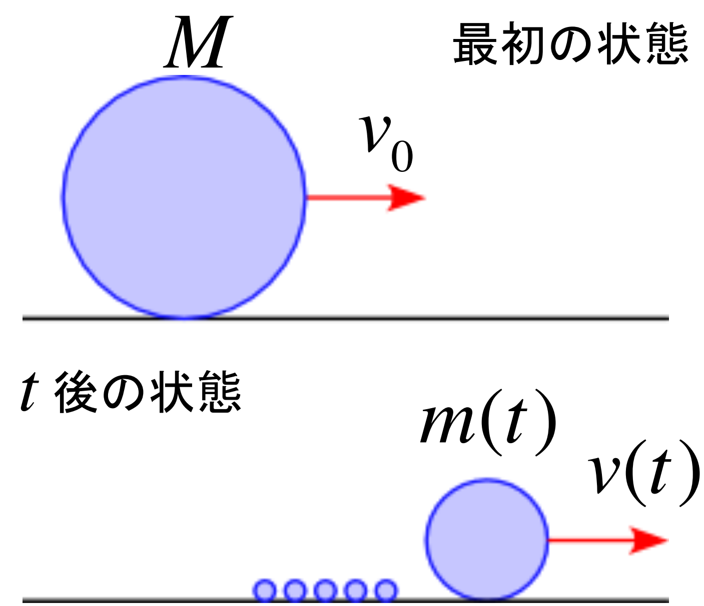
物体の初期質量を M、初速度を v_0 とする

噴出物質の速度は常に 0 になるように噴出されるものとする

1. 時間 t 後の質量 $m(t)$ を記述せよ

2. 時間 t 後の速度 $v(t)$ を求めよ

3. 時間 t 後の移動距離 $x(t)$ を求めよ



運動量保存則～例題

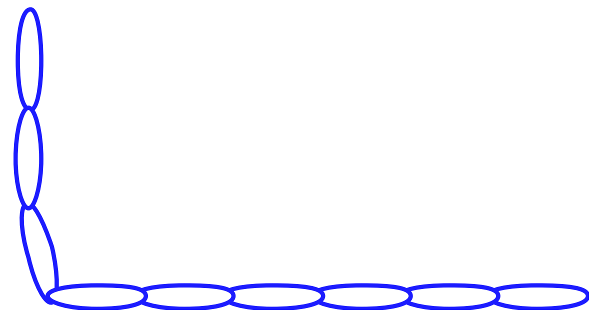
例題

床の上に線密度ρ の鎖が置いてある。

この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。

重力加速度をg として以下の問いに答えよ。

引き上げた部分の長さがx、速度が v 、加速度が a となったとき



1. 引き上げた部分の質量 mを記述せよ。

2. この時の運動方程式を記述せよ。

3. 引き上げる力 F の大きさを求めよ。

4. 一定の速度 v で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。

ニュートン力学～まとめ

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

t で積分　t で微分

速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

t で積分　t で微分

変位

$$x$$

運動方程式　$ma = F$

t で積分　t で微分

運動量
力積

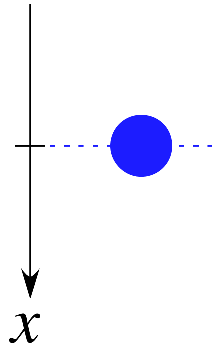
力の時間積分

x で積分　x で微分

運動エネルギー
仕事

力の距離積分

自由落下



運動方程式は

$$ma = mg$$

書きかえると

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

tで積分

$$\int m\frac{dv}{dt}dt = \int mg\,dt$$

$$m\int dv = mg\int dt$$

$$mv = mgt + C_1$$

$$v = gt + C_2$$

初期条件 $t = 0$ で $v = 0$ とすると、

$$v(0) = g \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

従って

$$\boxed{mv} = \boxed{mgt}$$

運動量と力積の関係

$$m\frac{dv}{dt}=mg$$

xで積分

$$\int m\frac{dv}{dt}dx=\int mg\,dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}v\,dt=mg\int dx$$

$$\int mv\,dv=mg\int dx$$

$$\frac{1}{2}mv^2=mgx+C_3$$

初期条件 $t=0$ で $x=0$ とすると、

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2=mg\cdot 0+C_3$$

$$C_3=0$$

従って

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}=\boxed{mgx}$$

エネルギーと仕事の関係

力学の講義を終えて

取り扱った内容

- 加速度 / 速度 / 変位
- ニュートンの運動の法則
- 仕事とエネルギー
- エネルギー保存則
- 運動量と力積
- 運動量保存則

取り扱っていない内容

- 円運動
- 単振動 / 単振り子
- ケプラーの法則
- 万有引力の法則
- 力のモーメント
- 角運動量
- 角運動量保存則
- 剛体の運動