2015講義ノート　物理数学

物理数学

- ベクトル
- ベクトルの内積・外積
- 偏微分・全微分
- 演算子
- ベクトル解析 (grad / div / rot)

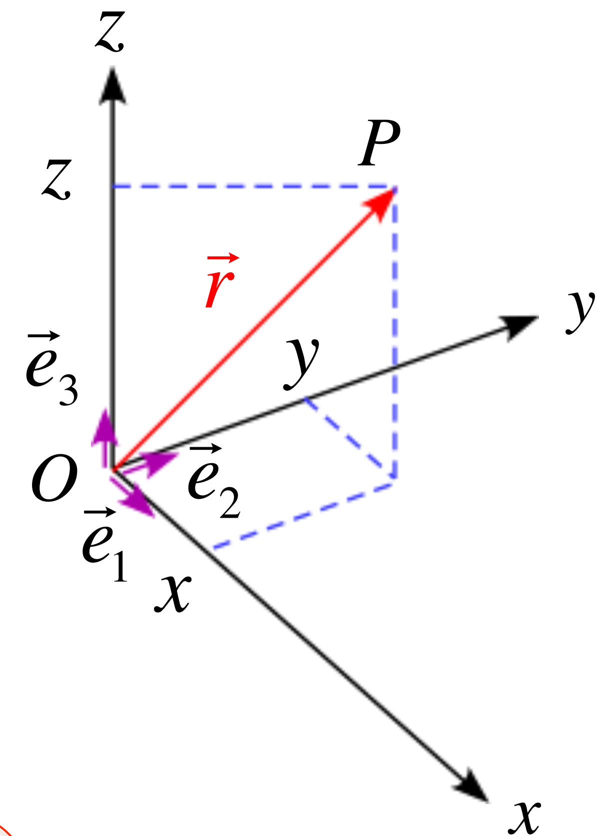
ベクトル

位置

観測者 O に対する（ O を始点とする）

物体 P の位置ベクトル

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$



この座標系は、観測者 O に対する

相対座標系となる

3次元の運動を考えるときは

このベクトルが時刻 t の関数として追跡する

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$$

ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{r} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_3$$

と表すことができる

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

変位ベクトルの時間変化率

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

速度ベクトルの時間変化率

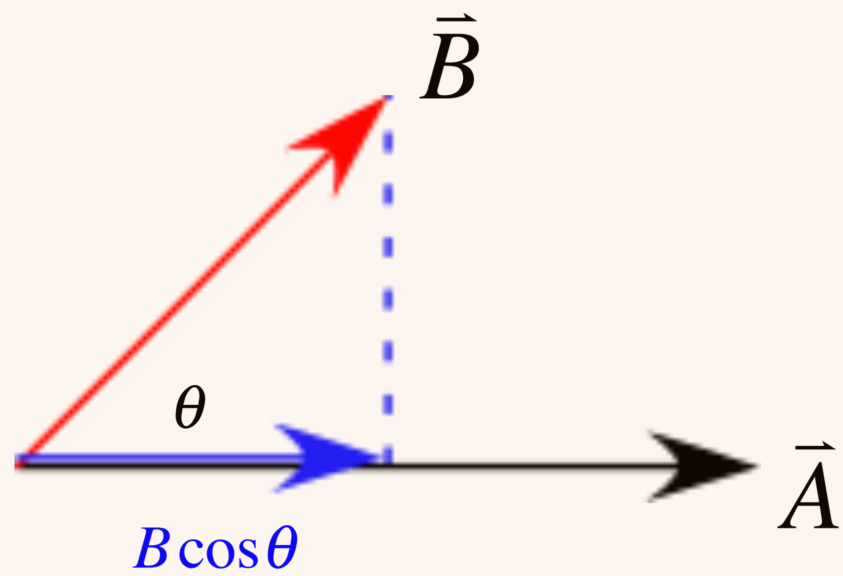
となる

ベクトル～内積

ベクトルの内積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



これを3次元の直交座標系を考える

ベクトルの成分を

$$\vec{A}=\left(A_x,A_y,A_z\right)\quad\vec{B}=\left(B_x,B_y,B_z\right)$$

とし、それぞれの単位ベクトルを $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ とすると

ベクトル～内積

ベクトルはそれぞれ

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

となるので、ベクトルの内積は

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)$$

$$A_x\vec{i}\cdot B_x\vec{i} + A_x\vec{i}\cdot B_y\vec{j} + A_x\vec{i}\cdot B_z\vec{k} +$$

$$A_y\vec{j}\cdot B_x\vec{i} + A_y\vec{j}\cdot B_y\vec{j} + A_y\vec{j}\cdot B_z\vec{k} +$$

$$A_z\vec{k}\cdot B_x\vec{i} + A_z\vec{k}\cdot B_y\vec{j} + A_z\vec{k}\cdot B_z\vec{k}$$

ベクトル～内積

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

が成立するので

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

となる

任意の2元

$$A=\left(A_1,A_2,\cdots A_n\right)$$

$$B=\left(B_1,B_2,\cdots B_n\right)$$

に対し

$$A\cdot B=\sum_{i=1}^{n}A_iB_i$$

それぞれの成分どうしをかけたものの和

ベクトル～外積

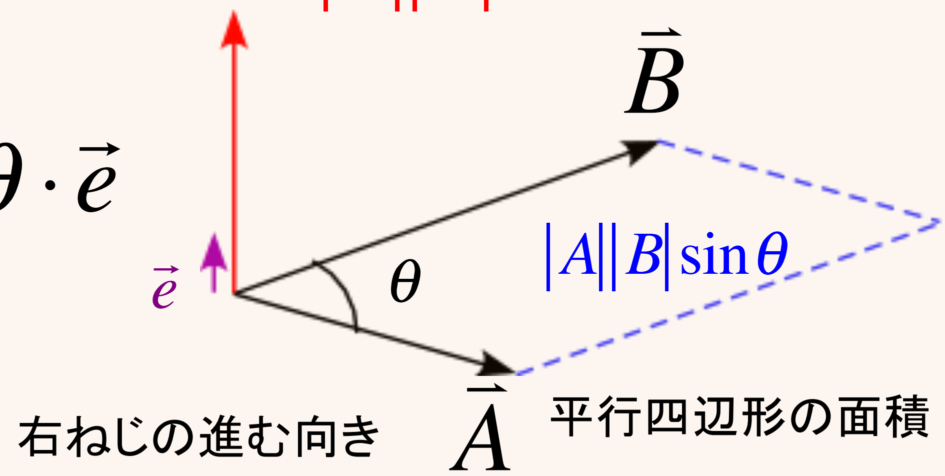
ベクトルの外積

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta \cdot \vec{e}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{C} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta \cdot \vec{e}$$



内積のときと同様に成分で考えてみると

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)\times\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)$$

$$A_x\vec{i}\times B_x\vec{i}+A_x\vec{i}\times B_y\vec{j}+A_x\vec{i}\times B_z\vec{k}+$$

$$A_y\vec{j}\times B_x\vec{i}+A_y\vec{j}\times B_y\vec{j}+A_y\vec{j}\times B_z\vec{k}+$$

$$A_z\vec{k}\times B_x\vec{i}+A_z\vec{k}\times B_y\vec{j}+A_z\vec{k}\times B_z\vec{k}$$

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

が成立するので

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix} A_yB_z-A_zB_y \\ A_zB_x-A_xB_z \\ A_xB_y-A_yB_z \end{pmatrix}$$

となる

微分～偏微分

微分と偏微分の違い

独立変数の数

例

$$y(x) = 2x + 1$$

y は x の関数

従属変数

独立変数

微分 : y の x に対する変化率

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x+1) = 2$$

微分～偏微分

関数 $y(x,t)$ の場合

独立変数は x,t の2つ

y の x に対する変化率

t を定数と考えて計算する

y を x で偏微分する

偏導関数

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x,t) - y(x,t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(x,t+\Delta t,) - y(x,t)}{\Delta t}$$

この考え方を使うと
多変数関数でも変化率
が定義できる

偏微分

例

関数 $y(x,t)$

$$y(x,t) = 3x^2 + 2x + 3t^2 + x^2t^3$$

の場合

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 2x + 3t^2 + x^2t^3\right) = 6x + 2 + 2t^3x$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(3x^2 + 2x + 3t^2 + x^2t^3\right) = 6t + 3x^2t^2$$

全微分

関数 $y(x,t)$ においての微小変化を考える

$$x \to x + dx$$
$$t \to t + dt$$

となったとき $y \to y + dy$ と変化したとする

このとき

$$dy = \boxed{\frac{\partial y}{\partial x}} dx + \boxed{\frac{\partial y}{\partial t}} dt$$

全微分

が成立する

y の x に対する変化率

y の t に対する変化率

$\dfrac{\partial y}{\partial x} dx$ ：x が dx 変化するときの y の変化

$\dfrac{\partial y}{\partial t} dt$ ：t が dt 変化するときの y の変化

演算子

演算子

演算子のあとの量についてその演算を行え

例

微分演算子

$$\frac{d}{dx}$$

あとからくる量を「x で微分せよ」

関数 $f\left(x,y\right)$ を考えると

$$f\left(x,y\right)=2x^2+3y$$

$$\frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{d}{dx}\left(2x^2+3y\right)=4x$$

演算子

例

微分演算子

$$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$$

関数 $f\left(x,y\right)$ を考えると

$$f\left(x,y\right)=2x^2+3y$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2+3y\right)+\frac{\partial}{\partial y}(2x^2+3y)$$

$$=4x+3$$

ベクトル微分演算子

ここで、演算子

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

を考える

この演算子を「ベクトル微分演算子」と呼ぶ ← 物理では非常に重要

ベクトル微分演算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

ナブラ

$\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ は単位ベクトル

ベクトル～grad

関数 $f(x,y,z)$ を考える

gradient (グラディエント)

ここで、演算子 ∇ を作用させると

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) f(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は単位ベクトル

この $\mathrm{grad}\, f$ は「f の勾配」と呼ぶ

ベクトル～grad

この演算子を作用させた意味について考えてみる

3次元関数 $f(x,y,z)$ において

この関数に対する全微分 df を考えると

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

これを内積を用いて書きかえると

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$= \mathrm{grad}\, f \cdot d\vec{r}$$

$$= \nabla f \cdot d\vec{r}$$

となる

ベクトル～grad

ここで $d\vec{r}$ 方向の単位ベクトルを $\vec{t}$ とおき

$$d\vec{r} = \vec{t} \cdot ds$$

と表すと

$$df = \nabla f \cdot \vec{t} ds$$

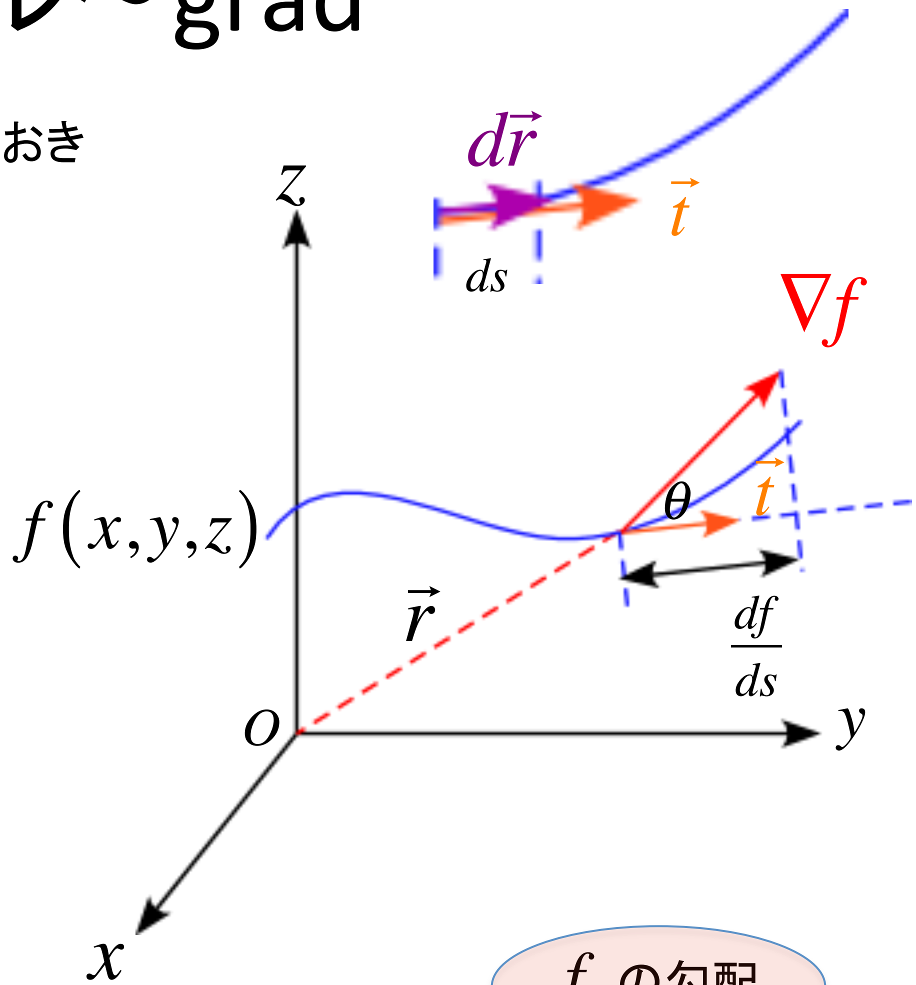
$$= |\nabla f| \cdot |\vec{t}| \cos\theta \cdot ds$$

$$= |\nabla f| \cdot ds \cos\theta$$

よって

$$\frac{df}{ds} = |\nabla f| \cdot \cos\theta$$

となる



f の勾配

$$\frac{df}{ds} = |\nabla f| \cdot \cos\theta \xrightarrow{\theta=0} \frac{df}{ds} = |\nabla f|$$

電場と電位
万有引力と位置エネルギー

ベクトル〜div

ベクトル $\vec{A} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)$ を考える

divergence (ダイバージェンス)

ここで、演算子 ∇ を作用させる

つまり、内積を考えると

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

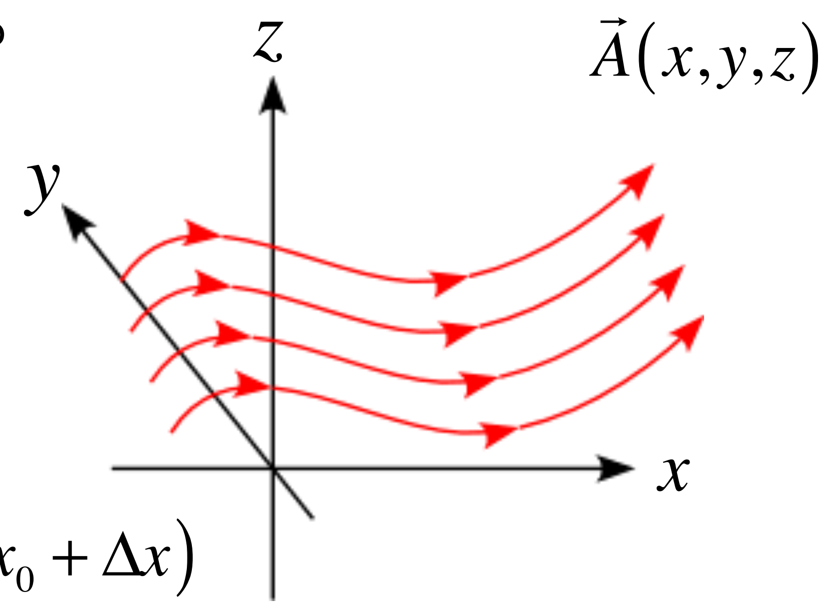
$\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ は単位ベクトル

この $\mathrm{div}\,\vec{A}$ は「ベクトル $\vec{A}$ の発散」と呼ぶ

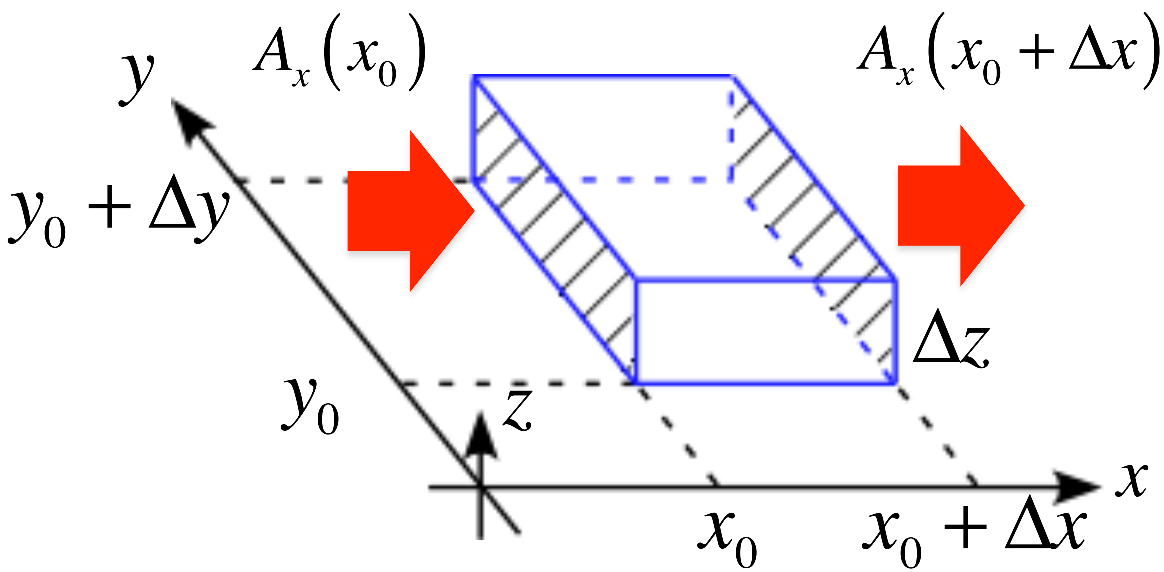
ベクトル〜div

3次元空間にベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)$ を考える

ベクトル場
電場や磁場のように向きと大きさをもつ場



このベクトル場のなかに微小直方体を考え、
この微小直方体内の「流れ」を考える



斜線部の2面に着目すると

流れ込む量

$$A_x(x_0)\cdot\Delta y\Delta z$$

流れ出る量

$$A_x(x_0+\Delta x)\cdot\Delta y\Delta z$$

ベクトル～div

よって、この微小直方体の x 方向に対して
流れ出る量 N_x は

$$N_x = A_x\left(x_0 + \Delta x\right)\Delta y \Delta z - A_x\left(x_0\right)\Delta y \Delta z$$
$$= \left\{A_x\left(x_0 + \Delta x\right) - A_x\left(x_0\right)\right\}\Delta y \Delta z$$
$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

同様に y, z 方向に対しては

$$N_y = \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$N_z = \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

ベクトル～div

よって、この微小直方体から流れ出る量Nは

$$N = N_x + N_y + N_z$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \nabla \cdot \vec{A} \Delta x \Delta y \Delta z$$

従って、

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{N}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

単位体積当たりの「流れ出る量」

div $\vec{A}$ は「ベクトル $\vec{A}$ の発散」

ベクトル $\vec{A}$ を電場と考えたとき
微小直方体から出る電気力線総数
を示している

div～ガウスの定理

微小直方体の体積を

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

とおくと

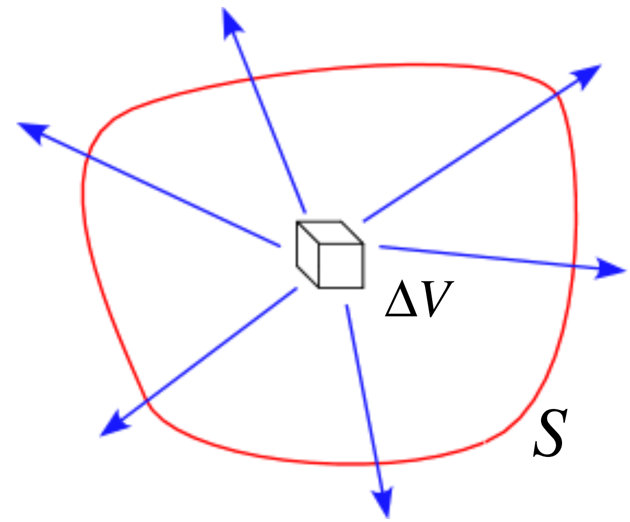
$$N = \nabla \cdot \vec{A} \Delta x \Delta y \Delta z$$
$$= \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) \Delta V$$

任意の体積 V にたいして積分を行うと

$$N_{\text{total}} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

一方、
この微小直方体を囲う任意の面 S を
横切る流量は、面の法線ベクトルを$\vec{n}$とすると

$$N_{\text{total}} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$



流れ出る線は必ずSを横切る

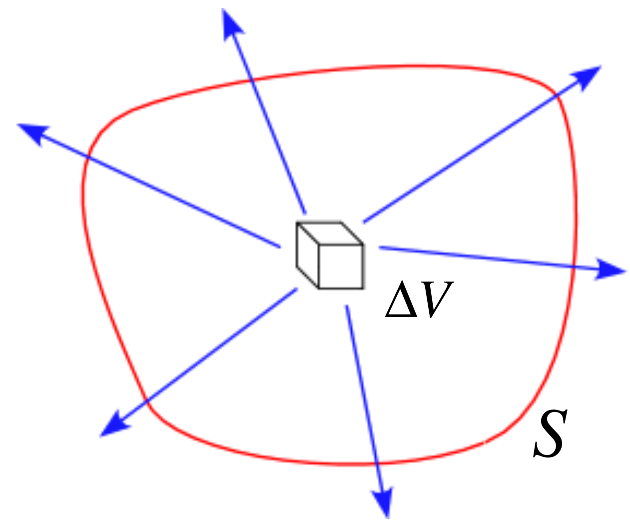
div～ガウスの定理

これらの式は等しいので

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

が成立する

ガウスの定理



面積積分と体積積分の関係を示す

ベクトル～rot

ベクトル $\vec{A} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)$ を考える

rotation (ローテーション)

ここで、演算子 ∇ を作用させる

つまり、外積を考えると

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \times \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)$$

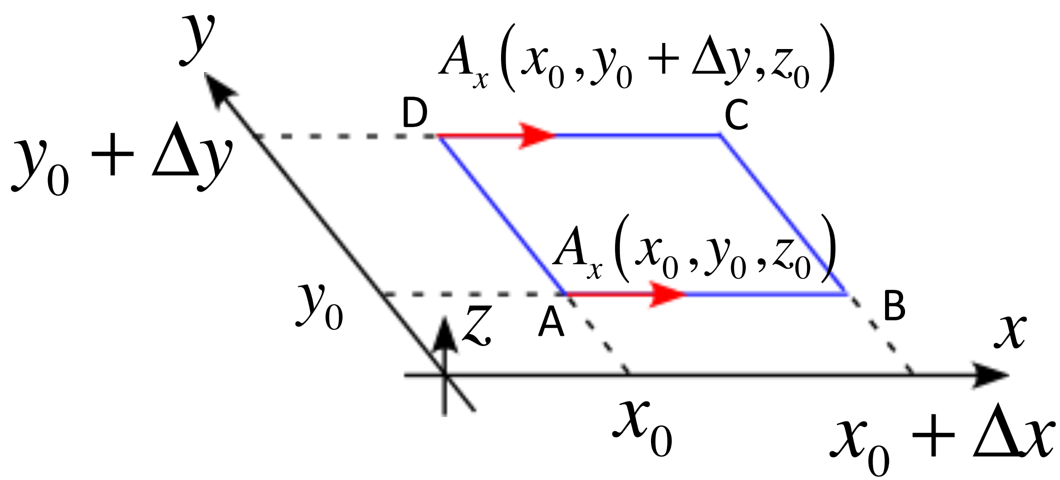
$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ は単位ベクトル

この $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ は「ベクトル $\vec{A}$ の回転」と呼ぶ

ベクトル～rot

3次元ベクトル空間内において、
図のような長方形ABCDを考える



長方形1周について A の和

を考えると

x 成分では

A→B + B→C + C→D +D→A のうち

A→B + C→D のみを考えればよく

$$
\begin{aligned}
&A_x\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta x - A_x\left(x_0, y_0+\Delta y, z_0\right)\cdot\Delta x \\
&\quad=\left\{A_x\left(x_0, y_0, z_0\right) - A_x\left(x_0, y_0+\Delta y, z_0\right)\right\}\cdot\Delta x \\
&\quad=-\left\{\frac{A_x\left(x_0, y_0+\Delta y, z_0\right) - A_x\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta y}\Delta y\right\}\cdot\Delta x \\
&\quad=-\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\Delta x
\end{aligned}
$$

となる

ベクトル～rot

同様に、y 成分では

A→B + B→C + C→D +D→A のうち

B→C + D→A のみを考えればよく

$$
\begin{aligned}
&A_y\left(x_0+\Delta x, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y - A_y\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y \\
&\quad = \left\{A_y\left(x_0+\Delta x, y_0, z_0\right) - A_y\left(x_0, y_0, z_0\right)\right\}\cdot\Delta y \\
&\quad = \left\{\frac{A_y\left(x_0+\Delta x, y_0, z_0\right) - A_y\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta x}\Delta x\right\}\cdot\Delta y \\
&\quad = \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$

となる

ベクトル～rot

従って、

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y=(\nabla\times A)_z\,\Delta x\Delta y$$

となり、$\nabla\times A$ の z 成分を表していることになる

同様に計算すると

x 成分：$\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}$　　y 成分：$\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}$

となるので

$$\nabla\times A=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

磁場や磁力線で重要

rot～ストークスの定理

微小な面を想定している面全体に拡張して考える

面に垂直な単位ベクトルを$\vec{n}$ とすると

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \vec{n} dS$$

と表せる

図からもわかるように、相殺される部分を
考慮すると、これは面全体の外周積分となる

よって、外周に沿った単位ベクトルを $\vec{t}$ とすると

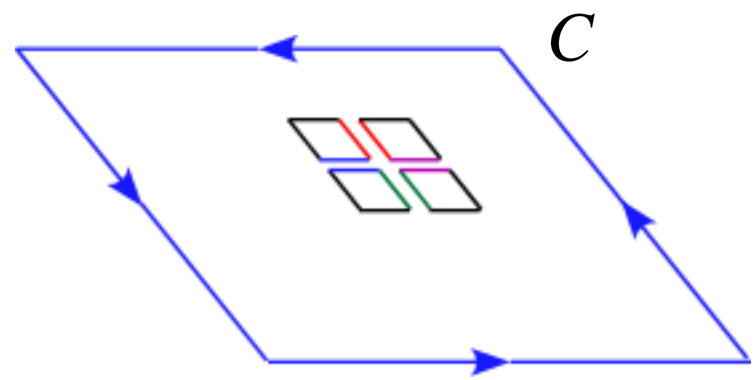
$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{t} ds$$

と等しくなる

従って

$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{t} ds = \left(\int_S \nabla \times \vec{A} \right) \vec{n} dS$$

が成立する



同じ色同士は相殺される

ストークスの定理

線積分と面積分の関係を表す